

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2026-63-31>

УДК 004.8:004.62

Турбал Юрій Васильович, д.т.н., професор

<http://orcid.org/0000-0002-5727-5334>

Кубай Олександр Васильович, аспірант

<http://orcid.org/0000-0002-2005-487X>

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна.

АНАЛІЗ СТОХАСТИЧНОСТІ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ПРОГНОЗІВ (PPS)

Турбал Ю.В., Кубай О.В. Аналіз ступеня стохастичності процесів на основі послідовності поліноміальних прогнозів (PPS). У статті розглянуто підхід до аналізу ступеня стохастичності процесів на основі послідовності поліноміальних прогнозів. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю визначення моменту, коли локальна детермінована структура процесу набуває ознак стохастичної поведінки під впливом випадкових збурень, що є важливим для задач короткострокового прогнозування за малих вибірок. Теоретичним підґрунтям роботи є результати, які пов'язують збіжність послідовності поліноміальних прогнозів із поведінкою відповідних скінченних різниць. Для випадку скінченних часових рядів із шумовою домішкою запропоновано емпіричний критерій втрати збіжності цієї послідовності. Дослідження виконуються на модельних процесах, що поєднують детерміновану компоненту та випадкову складову з керованим рівнем інтенсивності. Для кожного рівня збурення будується послідовність поліноміальних прогнозів і аналізується її структура та наявність тенденції до стабілізації. Метою роботи є встановлення критичного рівня шуму, за якого послідовність поліноміальних прогнозів втрачає тенденцію до збіжності. Такий підхід дає обґрунтування можливості використання цієї величини як індикатора ступеня стохастичності процесу у задачах інтелектуального аналізу даних. Очікується, що запропонований підхід дозволить кількісно оцінювати перехід від переважно детермінованої до поведінки процесу з ознаками стохастичності. Також це дасть можливість порівнювати різні класи модельних функцій за чутливістю до шуму та визначати області, у яких застосування поліноміальних прогнозів залишається доцільним і достатньо стійким для практичного використання. Такий підхід актуальний у задачах локального моделювання, прогнозування та інтелектуального аналізу часових рядів.

Ключові слова: ступінь стохастичності, короткострокове прогнозування, послідовність поліноміальних прогнозів (PPS), збіжність PPS, шумова домішка, детерміновані процеси.

Turbal Y., Kubay O. Analysis of the degree of stochasticity in processes based on a sequence of polynomial forecasts (PPS). This article presents an approach to analyzing the degree of stochasticity in processes based on a sequence of polynomial forecasts. The relevance of the study stems from the need to determine the moment when the local deterministic structure of a process acquires features of stochastic behavior under the influence of random disturbances, which is important for short-term forecasting problems with small samples. The theoretical basis of the work consists of results linking the convergence of a sequence of polynomial forecasts to the behavior of the corresponding finite differences. For the case of finite time series with a noise admixture, an empirical criterion for the loss of convergence of this sequence is proposed. The research is conducted on model processes that combine a deterministic component and a random component with a controlled level of intensity. For each level of perturbation, a sequence of polynomial forecasts is constructed, and its structure and the presence of a tendency toward stabilization are analyzed. The aim of the work is to establish the critical noise level at which the sequence of polynomial forecasts loses its tendency toward convergence. This approach provides a rationale for using this measure as an indicator of the degree of stochasticity in a process within the context of intelligent data analysis. It is expected that the proposed approach will enable a quantitative assessment of the transition from predominantly deterministic behavior to behavior exhibiting signs of stochasticity. It will also make it possible to compare different classes of model functions in terms of their sensitivity to noise and to identify areas where the use of polynomial forecasts remains appropriate and sufficiently robust for practical application. This approach is relevant in problems of local modeling, forecasting, and intelligent analysis of time series.

Keywords: degree of stochasticity, short-term forecasting, sequence of polynomial forecasts (PPS), convergence of PPS, noise component, deterministic processes.

Постановка наукової проблеми.

У сучасних умовах стрімкого зростання обсягів даних та підвищення динамічності процесів прогнозування часових рядів залишається однією з ключових задач інтелектуального аналізу даних. Якість прогнозних оцінок безпосередньо впливає на ефективність управлінських рішень у фінансовій сфері, виробництві, енергетиці, транспорті, інформаційних системах та інших галузях. Особливо складною ця задача є у випадках, коли доступна лише коротка вибірка спостережень, а досліджуваний процес поєднує регулярні тенденції та випадкові збурення.

Для таких умов важливим є не лише побудова прогнозу, але й попереднє визначення характеру процесу: чи зберігається в ньому локальна детермінована структура, чи випадкова складова вже стала домінуючою. Відповіді на це питання залежить доцільність застосування тих чи інших методів аналізу та прогнозування. Зокрема, методи, що ґрунтуються на локальній

апроксимації, інтерполяції або екстраполяції, є ефективними за наявності структурної впорядкованості даних, проте можуть втрачати точність у разі посилення стохастичних впливів.

Одним із перспективних підходів до короткострокового прогнозування є використання послідовності поліноміальних прогнозів, яка формується шляхом побудови набору альтернативних прогнозних значень для різних порядків полінома на одному й тому самому локальному фрагменті часового ряду. Попередні дослідження показали, що структура такої послідовності містить важливу інформацію про властивості досліджуваних даних: наявність збіжності, концентрації значень, локальної узгодженості або, навпаки, нестійкості та розсіювання. Це створює підстави розглядати послідовність поліноміальних прогнозів не лише як інструмент побудови прогнозу, а і як джерело інформації про внутрішню природу процесу.

Аналіз досліджень.

Ефективне дослідження ступеня стохастичності процесів потребує врахування результатів сучасних наукових праць, присвячених прогнозуванню часових рядів, аналізу випадкових збурень, комбінуванню прогнозів, кластеризації даних та оцінюванню передбачуваності процесів. Особливий інтерес становлять роботи, у яких вивчається поведінка множини альтернативних прогнозних оцінок, оскільки саме такий підхід є близьким до використання послідовності поліноміальних прогнозів. Аналіз наявних досліджень дає змогу визначити існуючі наукові результати, встановити невирішені аспекти проблеми та обґрунтувати доцільність застосування PPS як інструмента оцінювання переходу від переважно детермінованої до поведінки процесу з ознаками стохастичності.

Результати досліджень, наведені в [1], демонструють вдосконалення короткострокового прогнозування на основі вибору оптимального степеня полінома серед множини альтернативних поліноміальних прогнозів. Показано, що аналіз послідовності прогнозних значень для різних порядків полінома дозволяє підвищити точність прогнозу порівняно з використанням одного фіксованого полінома. Але залишилися невирішеними питання, пов'язані з використанням структури послідовності поліноміальних прогнозів як індикатора властивостей самого процесу, а не лише засобу отримання прогнозного значення.

У роботі [2] розглянуто підхід до прогнозування на основі інтелектуального аналізу поліноміальної екстраполяції. Автори показали, що множина локальних поліноміальних оцінок може бути використана для побудови гнучких алгоритмів короткострокового прогнозування за малих вибірок. Однак залишилися недостатньо дослідженими питання впливу випадкових збурень на поведінку всієї множини прогнозів та її стійкість до шуму.

Огляд розвитку комбінування прогнозів за понад п'ятдесят років наведений у праці [3]. Показано, що множина альтернативних прогнозів у багатьох випадках є інформативнішою і стійкішою, ніж вибір одного найкращого прогнозу. Але залишилися невирішеними питання, пов'язані з аналізом внутрішньої структури множини прогнозів у конкретний момент часу, коли прогнозні оцінки можуть утворювати компактні області, декілька кластерів або віддалені викиди. Причиною цього є загальний характер огляду, який не спеціалізується на локальних прогнозних послідовностях.

Сучасні дослідження у сфері аналізу та прогнозування часових рядів демонструють стійку тенденцію до ускладнення моделей і розширення кола методів, що застосовуються до шумних, нелінійних і нестационарних даних. Значна частина робіт зосереджена на підвищенні точності прогнозу за рахунок кластеризації, комбінування моделей, глибинного навчання та ймовірнісних підходів. Зокрема, у роботі [4] показано, що кластеризація часових рядів за предиктивною подібністю може покращувати якість глобальних моделей прогнозування. Такий результат є важливим, оскільки підтверджує доцільність аналізу не лише окремого ряду, а й структурних зв'язків між даними. Водночас у цій постановці об'єктом дослідження залишаються самі часові ряди або їх ознаки, тоді як множина альтернативних прогнозів для окремого моменту часу фактично не розглядається.

Близькою за змістом є ідея використання внутрішніх характеристик процесу для оцінювання його випадковості. У роботі [5] стохастичність часових рядів досліджується через непараметричні критерії внутрішньої передбачуваності, і показано, що рівень передбачуваності може слугувати індикатором випадкової поведінки процесу. Разом із тим такий підхід спирається передусім на глобальні статистичні властивості ряду, а не на локальну структуру прогнозних оцінок.

Подібну проблему порушено і в роботі [6], де проаналізовано вплив білого шуму на адекватність часових моделей та якість прогнозування. Автори переконливо демонструють, що помилкова інтерпретація шумових компонент здатна суттєво спотворювати висновки щодо моделі, однак питання про практичне визначення моменту, коли випадкова складова починає домінувати над локальною детермінованою структурою процесу, залишається відкритим.

Інший великий напрям досліджень стосується безпосередньо прогнозних моделей. В огляді [7] показано, що для промислових систем ефективність статистичних, машинних і гібридних методів істотно залежить від типу даних і режиму функціонування об'єкта. Аналогічний висновок міститься й у роботі [8], де підкреслено, що структура сигналу, нелінійність, сезонність і шум є визначальними чинниками успішності прогнозування. Проте в обох випадках основна увага зосереджена на порівнянні моделей, а не на створенні простих інтерпретованих критеріїв, які дозволяли б ще до вибору складного алгоритму оцінити, наскільки процес є детермінованим або стохастично-домінованим. Це саме той аспект, який набуває особливої ваги в умовах коротких вибірок.

У фінансовому прогнозуванні ця тенденція проявляється ще виразніше. Огляди [9] і [10] показують, що сучасні гібридні архітектури глибинного навчання здатні забезпечувати високу точність навіть у складних нелінійних середовищах і за умов значного шуму. Однак така точність досягається ціною високої складності моделей, значних вимог до даних і суттєвих обчислювальних витрат. Через це проблема інтерпретованого оцінювання ступеня стохастичності процесу, особливо для локальних прикладних задач і малих вибірок, фактично не розв'язується. Схожа ситуація спостерігається і в межах імовірнісного прогнозування: у роботі [12] показано, що імовірнісні моделі дають змогу оцінювати не лише точкові прогнози, а й розподіли майбутніх значень, проте їхня орієнтація на навчання з даних не забезпечує простого засобу для виявлення межі між впорядкованою та випадковою поведінкою процесу.

На цьому тлі поліноміальні та екстраполяційні підходи зберігають свою актуальність саме завдяки простоті, локальності та інтерпретованості. У роботі [11] показано, що такі методи залишаються придатними для короткострокового локального прогнозування. Проте межі їх стійкості до випадкових збурень усе ще недостатньо досліджені. Саме тому особливий інтерес становить робота [13], у якій встановлено зв'язок між збіжністю послідовності поліноміальних прогнозів і поведінкою відповідних скінченних різниць. Цей результат є принципово важливим, оскільки переводить PPS із суто прогнозного інструмента в площину аналітичного дослідження властивостей процесу. Якщо збіжність PPS пов'язана з наявністю локальної впорядкованості, то втрата такої збіжності може розглядатися як ознака посилення стохастичної складової.

Варто зауважити, що в сучасній науці для розмежування детермінованого хаосу, істинної стохастичності та складних багатовимірних процесів використовуються низку метрик.

Найбільший показник Ляпунова (Largest Lyapunov Exponent, LLE) – це метрика, яка кількісно оцінює середню експоненційну швидкість розбіжності або збіжності близьких траєкторій у фазовому просторі динамічної системи. Перевагою цього підходу є його добре обґрунтована теоретична база та широке застосування у фізиці, біомедицині, економіці й фінансовому аналізі. Водночас практичне використання цього показника для емпіричних часових рядів є складним, оскільки для його визначення необхідно мати формалізований опис динамічної системи, адекватну математичну модель, яку не завжди вдається побудувати. На практиці, як правило, мають справу з істотно обмеженою вибіркою вхідних даних. Крім того, для коротких або зашумлених рядів існує ризик хибної інтерпретації додатного показника як ознаки хаосу, що обмежує надійність LLE у прикладних задачах локального аналізу стохастичності процесів [14].

Рекурентний аналіз (Recurrence Quantification Analysis, RQA) – це метод кількісного аналізу повторюваності станів динамічної системи у фазовому просторі, який дає змогу оцінювати регулярність, детермінованість, складність і зміни режимів поведінки часового ряду. Його перевагою є придатність для аналізу нелінійних і нестационарних процесів, а також можливість працювати з відносно короткими рядами порівняно з деякими класичними методами фазового аналізу. Водночас результати RQA істотно залежать від вибору параметрів реконструкції фазового простору, зокрема розмірності вкладення, часової затримки та порога рекурентності, а наявність шуму може спотворювати рекурентну структуру [15];

Дисперсія Аллана (Allan Variance) – це статистична характеристика, що використовується для оцінювання стабільності часових або частотних процесів через аналіз змін між сусідніми

усередненими значеннями на різних часових інтервалах. Її перевагою є здатність виявляти різні типи шуму та нестабільності, тому метод широко застосовується в аналізі атомних годинників, генераторів, сенсорів, гіроскопів і технічних часових рядів. Водночас дисперсія Аллана чутлива до довжини вибірки, пропусків у даних, трендів і вибору масштабу усереднення, а її інтерпретація для коротких або складних нелінійних рядів може бути неоднозначною [16].

Таким чином, аналіз досліджень показує, що сучасна література або орієнтується на підвищення точності прогнозу шляхом ускладнення моделей, або вивчає стохастичність через загальні статистичні характеристики рядів. Водночас недостатньо розробленим залишається підхід, у якому ступінь стохастичності процесу оцінюється через поведінку локальної послідовності прогнозних значень. Саме це дає підстави вважати доцільним дослідження, присвячене використанню втрати збіжності послідовності поліноміальних прогнозів як індикатора переходу від переважно детермінованої до поведінки процесу з ознаками стохастичності.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.

У цій роботі досліджується можливість використання послідовності поліноміальних прогнозів як індикатора стохастичності процесу. Основна ідея полягає в тому, що для локально детермінованого процесу послідовність поліноміальних прогнозів має демонструвати тенденцію до збіжності або, принаймні, до стабілізації, тоді як із посиленням випадкової складової така тенденція слабшає, а згодом зникає. Отже, момент втрати збіжності PPS може бути використаний як ознака переходу від переважно детермінованої до стохастично-домінованої поведінки процесу.

1. Модель дослідження процесів на основі послідовності поліноміальних прогнозів (PPS).

Нехай відомі значення деякого часового ряду $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-m+1}$. Якщо необхідно для кожного локального фрагмента ряду довжини m будувати однокроковий поліноміальний прогноз, то у дослідженні [2] показано, що таке прогнозне значення може бути знайдене без явного знаходження коефіцієнтів інтерполяційного полінома, а на основі прямої біноміальної формули. Це істотно спрощує обчислення для всіх значень m і дає можливість швидко формувати повну послідовність прогнозів.

Прогнозне значення, побудоване за m точками, визначається формулою

$$p_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1}. \quad (1)$$

Послідовність $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ будемо називати послідовністю поліноміальних прогнозів (PPS). У [13] показано, що така послідовність може мати різну внутрішню структуру: тенденцію до збіжності, наявність локальних екстремумів, інтервали концентрації та віддалені значення. Саме ці структурні особливості роблять PPS придатною не лише для побудови прогнозу, а й для аналізу характеру самого процесу. А тому будемо використовувати PPS для дослідження стохастичності процесу. В роботі [13] визначено умови збіжності PPS. При цьому в ході чисельних експериментів було виявлено значну чутливість послідовності PPS від наявності стохастичних збурень вхідних даних. Ця особливість і є головною ідеєю досліджень даної роботи.

Для аналізу ступеня стохастичності будемо розглядати модельний часовий ряд, у якому детермінована компонента поєднується з випадковим збуренням заданої інтенсивності. Нехай базовий процес описується деякою детермінованою функцією $g(i)$, визначеною у вузлах рівномірної сітки. Тоді досліджувана послідовність задається співвідношенням

$$f_i = g(i) + \varepsilon \xi_i,$$

де ξ_i – випадкова величина, а параметр ε визначає рівень стохастичного збурення. У ролі базових детермінованих функцій будемо використовувати декілька типів залежностей, які відрізняються характером локальної геометрії: монотонно зростаючі, осциляційні та змішані. Це дає змогу оцінити, наскільки втрата збіжності PPS залежить не лише від інтенсивності шуму, а й від форми детермінованої складової.

Такий підхід дозволяє варіювати ступінь випадковості процесу контрольованим способом і, відповідно, аналізувати зміни поведінки PPS в широкому діапазоні умов.

Теоретичне підґрунтя використання PPS для аналізу стохастичності.

Ключовим теоретичним результатом, на який спирається дана робота, є встановлений у дослідженні [13] зв'язок між збіжністю PPS і поведінкою відповідних скінченних різниць. Для того

щоб послідовність прогнозів можна було використовувати як індикатор, необхідно чітко розуміти математичні умови її збіжності. Теоретичний аналіз, проведений авторами, встановлює прямий зв'язок між збіжністю PPS та поведінкою скінченних різниць високих порядків. Зокрема, доведено, що послідовність $\{p_m\}$ збігається при фіксованому n та $m \rightarrow \infty$ тоді і тільки тоді, коли існує скінченна границя m -тої скінченної різниці $\Delta^m f_n$.

Це спостереження дозволило запровадити нову таксономію функцій та даних, розділивши їх на специфічні класи стабільності:

1. Біноміально-стабільні функції (клас \mathcal{E}) – клас детермінованих функцій, для яких границя скінченних різниць існує і дорівнює нулю (або константі) при будь-якому обраному кроці дискретизації h . Представниками цього класу є алгебраїчні поліноми будь-яких степенів та показникові (експоненційні) функції.
2. Умовно біноміально-стабільні функції – це клас процесів, для яких збіжність послідовності поліноміальних прогнозів не є гарантованою, а залежить від вибору величини кроку дискретизації h . Прикладом є періодичні (тригонометричні) функції. При одних значеннях кроку h (наприклад, кратних періоду) PPS може збігатися, тоді як при інших – генерувати розбіжну послідовність зі зростаючою амплітудою коливань.
3. Скінченно біноміально-стабільні дані – практичний аналог для експериментальних вибірок обмеженої довжини, де перевіряється тенденція до збіжності на скінченному наборі m точок.

При наявності випадкових збурень послідовність PPS матиме вигляд:

$$p_m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k (g_{n-k+1} + \varepsilon \xi_{n-k+1}),$$

де $g_{n-k+1} = g((n-k+1)h)$, h – крок сітки. Виконуючи перетворення, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k (g_{n-k+1} + \varepsilon \xi_{n-k+1}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k g_{n-k+1} + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k \varepsilon \xi_{n-k+1}.$$

Таким чином

$$\tilde{p}_m(n+1) = p_m(n+1) + \varepsilon \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k \xi_{n-k+1}, \quad (2)$$

де

$$\tilde{p}_m(n+1) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k (g_{n-k+1} + \varepsilon \xi_{n-k+1}),$$

$$p_m(n+1) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k g_{n-k+1}.$$

Із співвідношення (2) бачимо, що збіжність стохастично збуреної послідовності за умови збіжності детермінованої складової залежить від збіжності послідовності поліноміальних прогнозів для стохастичної складової. Таким чином, будемо досліджувати PPS для рівномірно розподілених, незалежних випадкових величин. Параметр ε , очевидно, впливатиме лише на модуль відповідних збурень.

Деякі чисельні результати.

Для емпіричного аналізу було розроблено програмне середовище у форматі Jupyter Notebook для Google Colab, яке забезпечує генерацію випадкових часових рядів із рівномірним, нормальним та показниковим розподілами і побудову відповідних послідовностей поліноміальних прогнозів. Програмний комплекс обчислює елементи PPS для різних порядків, прирости між сусідніми прогнозами, кількість змін знаку та логарифмічні характеристики зростання амплітуди. Передбачено візуалізацію вихідного ряду, значень PPS, знакової структури, сусідніх приростів і темпу зростання модуля прогнозних значень. Такий інструментарій дає змогу досліджувати наявність інтервалів монотонності, локальних екстремумів та розбіжної поведінки PPS, яка у роботі інтерпретується як індикатор стохастично-домінованої природи процесу.

Розглянемо послідовність незалежних рівномірно розподілених випадкових величин, що мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$, (рис.1).

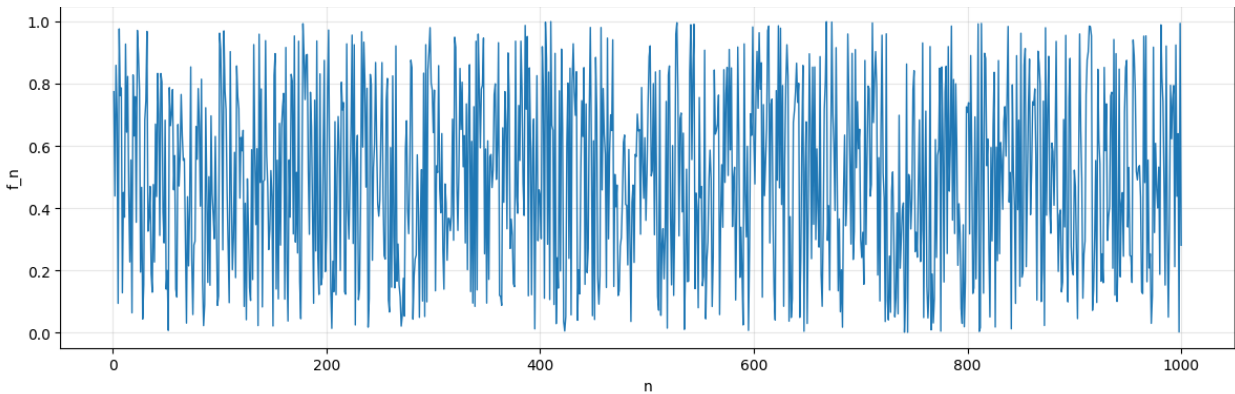


Рис. 1. Рівномірно розподілені випадкові величини, які мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$, параметр $seed = 42$.

Для рівномірно розподілених випадкових даних на інтервалі $[0,1]$ послідовність поліноміальних прогнозів не має ознак збіжності у класичному розумінні, однак її поведінка не повністю хаотична у візуальному представленні. На графіках PPS можна спостерігати окремі інтервали монотонного зростання або спадання, а також локальні екстремуми, у яких напрям зміни прогнозних значень змінюється на протилежний, (рис. 2). Це свідчить про те, що навіть для випадкових вхідних даних біноміальна структура формули поліноміального прогнозу породжує певну внутрішню організацію послідовності p_m .

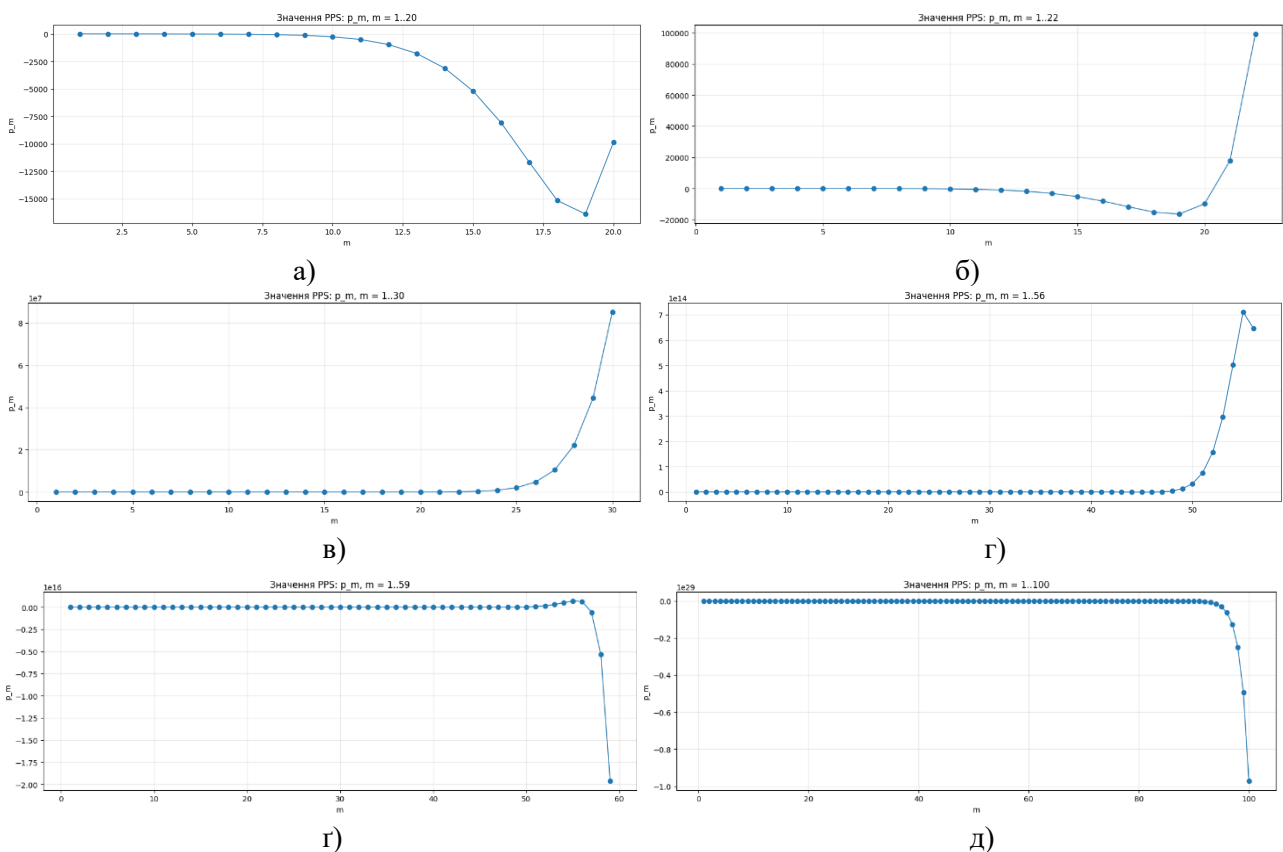


Рис. 2. Поведінка PPS для різних значень m : а) при $m = 20$; б) при $m = 22$; в) при $m = 30$; г) при $m = 56$; д) при $m = 59$; е) при $m = 100$.

Наведені вище чисельні результати показують, що послідовність поліноміальних прогнозів на стохастичних даних демонструє чітку детерміновану поведінку. Незважаючи на те, що вхідні дані є незалежними випадковими величинами, PPS має інтервали монотонності та локальні екстремуми. Наявність інтервалів монотонності, їх строге чергування (зростання, спадання, і т. д.) свідчить про стохастичну залежність елементів PPS. Очевидно, що легко підібрати детерміновану функцію, яка буде добре апроксимувати поведінку PPS на будь-якому інтервалі. Наприклад, це

функції виду $y = ax^k \cos(x)$. Відповідні осцилюючі функції із зростаючою амплітудою розглядались в якості при дослідженні пірамідального методу прогнозування в роботі [17].

Аналогічні результати отримані для показникового та нормального розподілів (рис.3-6).

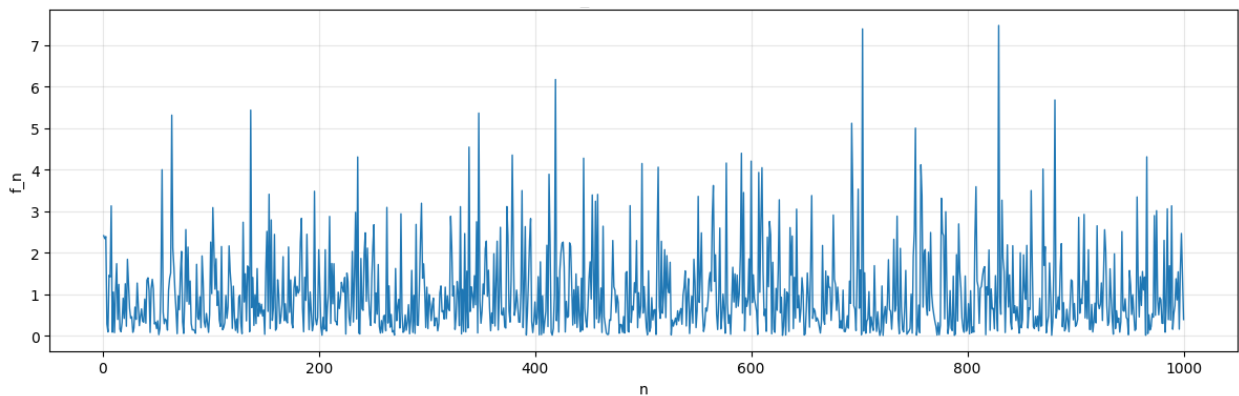


Рис. 3. Випадкові величини, які мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1$, $seed = 42$.

На рис. 4 показано, як поводить себе послідовність PPS для показникового розподілу при різних значеннях m .

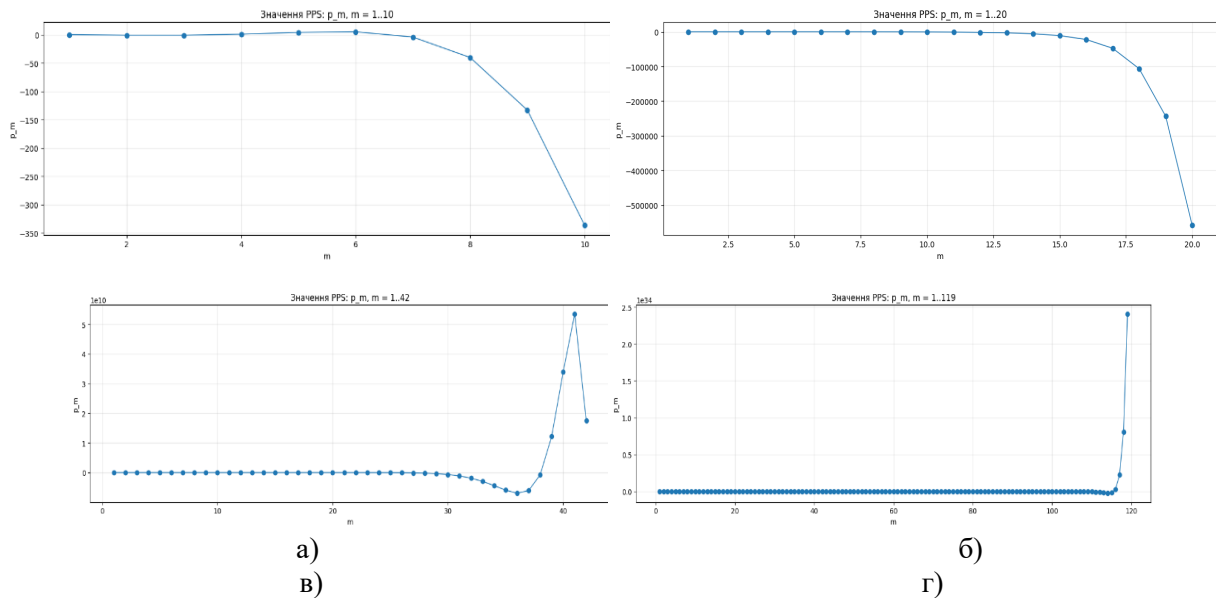


Рис 4. Поведінка PPS для різних значень m для показникового розподілу: а) при $m = 10$; б) при $m = 20$; в) при $m = 42$; г) при $m = 119$.

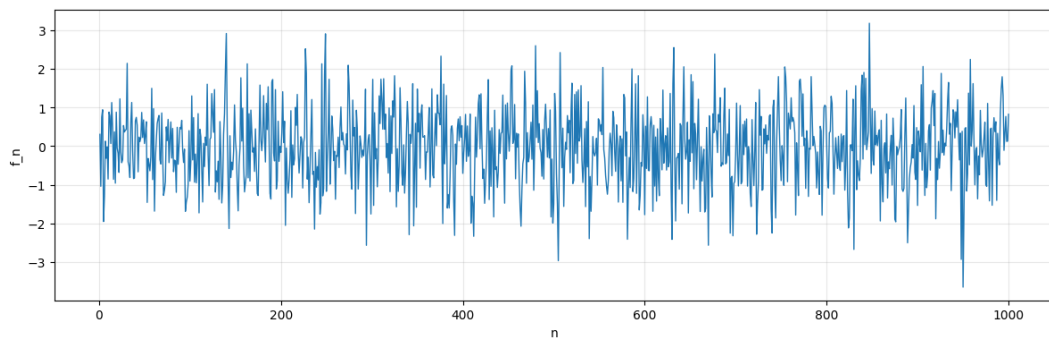


Рис. 5. Випадкові величини, які мають нормальний розподіл $N(0,1)$, $seed = 42$.

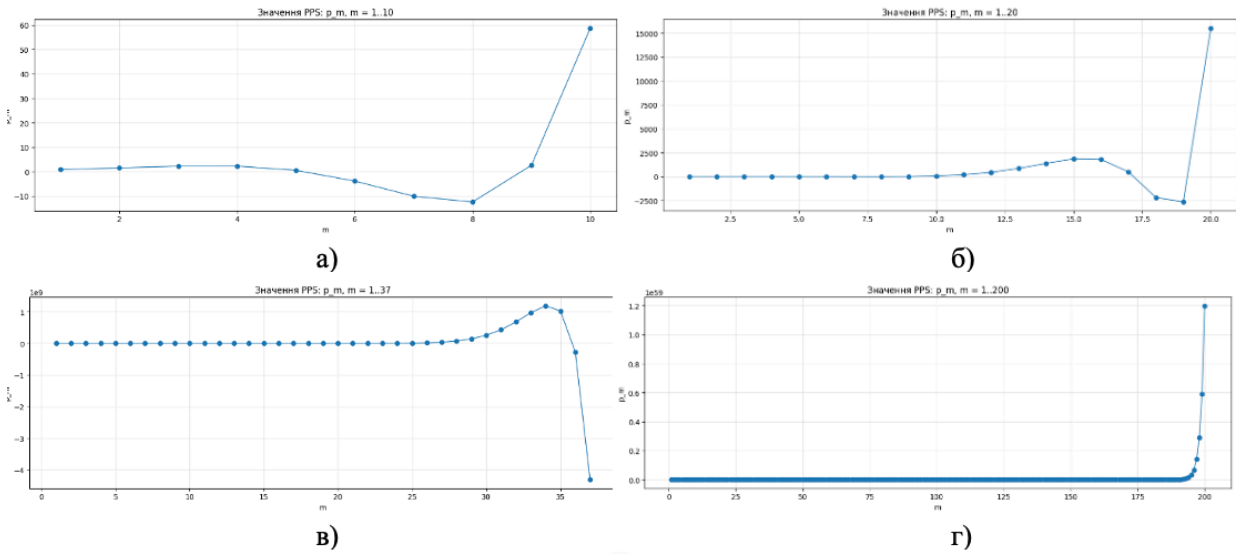


Рис 6. Поведінка PPS для різних значень m для нормального розподілу $N(0,1)$: а) при $m = 10$; б) при $m = 20$; в) при $m = 37$; г) при $m = 200$.

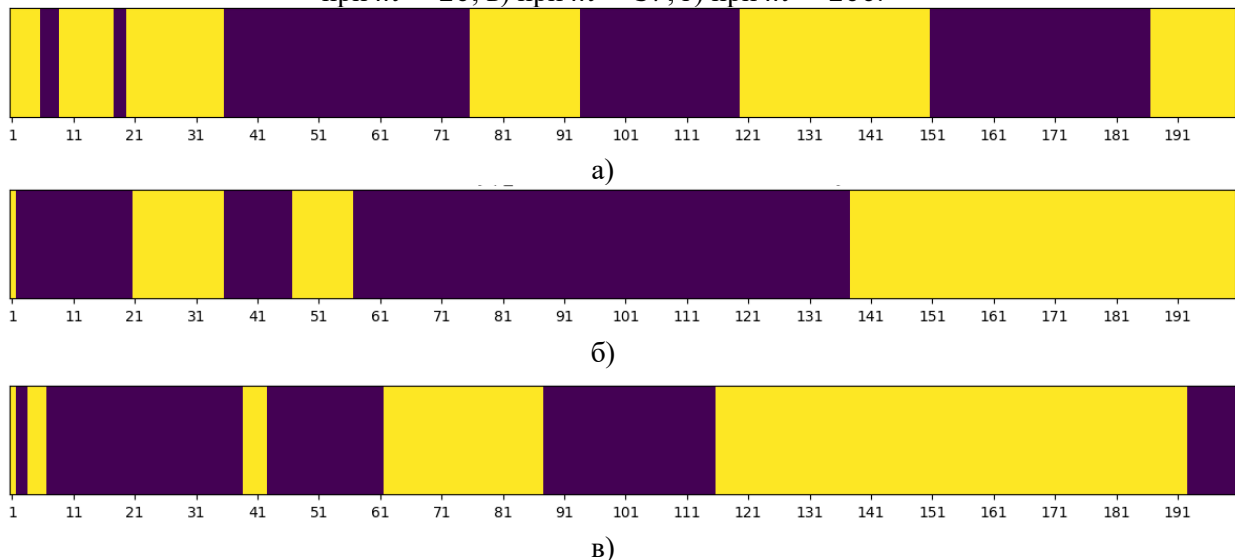


Рис. 7. Зміна знаку послідовності PPS для різних типів розподілів (значення $m = 200$, для всіх параметр $seed = 42$): а) нормальний розподіл; б) рівномірний розподіл; в) показниковий розподіл.

Графік зміни знаку p_m (рис. 7) відображає послідовність знаків елементів PPS і дає змогу оцінити наявність осциляцій у поліноміальних прогнозах. Якщо знак прогнозних значень на певному інтервалі зберігається, це може вказувати на локальну узгодженість елементів PPS. Графік є допоміжним інструментом для виявлення осциляцій, інтервалів відносної стабільності та моментів зміни характеру поведінки послідовності поліноміальних прогнозів.

Таким чином, чисельні експерименти показують, що PPS для стохастичних даних розбігається. Це означає, що розбігатиметься і PPS для вихідного процесу, що складається із детермінованої та стохастичної компоненти. При цьому, за рахунок вибору різних значень параметру ε можемо отримати ефект аналога збіжності для скінченного випадку, тобто матимемо скінченно біноміально стабільні значення. Поняття скінченно біноміально-стабільних значень вперше введено у роботі [13]. Часовий ряд будемо називати скінченно біноміально стабільним, якщо $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 |p_{k+1} - p_k| < |p_k - p_{k-1}|$. Очевидно, що для будь-якого вхідного скінченного набору точок існує таке значення ε , при якому стохастично збурений часовий ряд буде скінченно біноміально стабільним. Однак надзвичайно висока чутливість послідовності PPS до стохастичних значень дозволяє використовувати її в якості критерію для перевірки стохастичності процесу.

Метод дослідження стохастичності процесу на основі PPS:

1. Отримуємо значення часово процесу з рівномірними інтервалами спостережень.

2. Будуємо PPS на основі співвідношення (1).
3. Перевіряємо біноміальну стабільність часового ряду.
4. Якщо часовий ряд є біноміально-стабільним, то вважаємо, що процес є детермінованим для об'єму вибірки n . В протилежному випадку маємо випадковість чи детермінований хаос.

Звернемо увагу на той факт, що в процесі чисельних досліджень будувались прогнози значення на основі многочленів до 200 степеня, що було б чисельно неможливо за умови використання класичних підходів до побудови прогнозів на основі многочленів через обчислювальну складність задач знаходження коефіцієнтів многочленів та розв'язання систем лінійних рівнянь великої розмірності. Лише наявність прямої формули обчислення прогнозного значення (1) робить можливим відповідні дослідження.

Висновки та перспективи подальшого дослідження

У роботі розглянуто підхід до аналізу стохастичності процесів на основі поведінки послідовності поліноміальних прогнозів. Показано, що PPS може використовуватися не лише як інструмент короткострокового прогнозування, а й як засіб виявлення закономірностей у часовому ряду. Теоретичною основою такого підходу є зв'язок між збіжністю PPS і поведінкою відповідних скінченних різниць, що дозволяє розглядати збіжність або скінченну біноміальну стабільність як ознаку наявності детермінованої структури в даних. У результаті чисельних експериментів встановлено, що для послідовностей незалежних випадкових величин із рівномірним, показниковим і нормальним розподілами PPS не демонструє збіжності у класичному розумінні. При цьому поведінка PPS не є стохастичною: на графіках спостерігаються інтервали монотонного зростання або спадання, локальні екстремуми, зміни знаку та зростання амплітуди прогнозних значень. Це свідчить про те, що біноміальна структура формули поліноміального прогнозу перетворює випадкові вхідні флуктуації у специфічну осциляційну послідовність із внутрішніми локальними закономірностями, однак без ознак стійкої збіжності. Отримані результати дають підстави розглядати розбіжність PPS як індикатор стохастично-домінованої поведінки процесу. Якщо для досліджуваного часового ряду послідовність поліноміальних прогнозів є скінченно біноміально стабільною, це може свідчити про наявність локальної детермінованої структури на відповідному фрагменті даних. Якщо ж PPS розбігається, має значні осциляції, часті зміни знаку та зростаючу амплітуду, то це може вказувати на наявність вираженої випадкової складової або складної динаміки, що не описується локальною поліноміальною структурою.

Запропонований підхід має прикладну цінність для задач інтелектуального аналізу коротких часових рядів, де застосування складних статистичних, фазових або нейромережових моделей може бути обмеженим через малий обсяг вибірки, високу чутливість до параметрів або значні обчислювальні витрати. Використання прямої біноміальної формули для обчислення поліноміальних прогнозів дає змогу досліджувати PPS для високих порядків без явного знаходження коефіцієнтів інтерполяційних поліномів, що істотно спрощує проведення чисельних експериментів.

Перспективи подальших досліджень полягають у формалізації кількісних показників розбіжності PPS, зокрема через аналіз приростів між сусідніми елементами, частоти зміни знаку, швидкості зростання амплітуди та довжини інтервалів монотонності. Окремим напрямом подальшої роботи є порівняння PPS-критерію зі стандартними методами аналізу складних процесів, зокрема найбільшим показником Ляпунова, рекурентним аналізом і дисперсією Аллана, а також перевірка запропонованого підходу на реальних фінансових, технічних та природничих часових рядах.

Список бібліографічного опису

1. Turbal Y. V., Kubai O. V. (2023) The polynomial forecasts improvement based on the algorithm of optimal polynomial degree selecting. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 6, no. 4 (126), pp. 17–26.
2. Turbal, Y., Turbal, M., Kubai, O., Smirnov, D., Melnychuk, M. Forecasting method based on averaging a polynomial extrapolation sequence. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. No. 8. P. 326–329. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.102>.
3. Wang X., Hyndman R. J., Li F., Kang Y. (2023) Forecast combinations: An over 50-year review. *International Journal of Forecasting*, vol. 39, no. 4, pp. 1518–1547.
4. López-Oriona A., Montero-Manso P., Vilar J. A. (2025) Time series clustering based on prediction accuracy of global forecasting models. *Knowledge-Based Systems*, vol. 312, article 113221.
5. Şen B., Ye H., Sugihara G. (2024) Detecting stochasticity in population time series using a non-parametric test of intrinsic predictability. *Methods in Ecology and Evolution*, vol. 15, no. 9, pp. 1741–1754.
6. Hassani H., Silva E. S., Ghodsi M. (2025) White Noise and Its Misapplications: Impacts on Time Series Model Adequacy and Forecasting. *Stats*, vol. 7, no. 1, pp. 8–23.

7. Karmaker S., Hossain M., Rahman M. et al. A Review of Time-Series Forecasting Algorithms for Industrial Manufacturing Systems. 2024. <https://doi.org/10.3390/machines12060380>.
8. Shah, Dhawani & Thaker, Manishkumar. (2024). A Review of Time Series Forecasting Methods. International journal of research and analytical reviews. 11. 749. 10.1729/Journal.38816.
9. Giantsidi A., Tarantola A. (2025) Deep learning for financial forecasting: A review of recent trends. Finance Research Letters, vol. 74, article 106885.
10. Li X., Zhang Y., Chen H. et al. (2025) Enhancing financial time series forecasting with hybrid Deep Learning: CEEMDAN-Informer-LSTM model. Applied Soft Computing, vol. 168, article 112345.
11. Saunoriene L., Mockus J., Katkevičius A. (2025) Short-term time series prediction based on evolutionary interpolation of Chebyshev polynomials with internal smoothing. Soft Computing, vol. 29, no. 1, pp. 1–15.
12. Salinas D., Flunkert V., Gasthaus J. (2017) DeepAR: Probabilistic Forecasting with Autoregressive Recurrent Networks. arXiv preprint arXiv:1704.04110.
13. Turbal Y. V., Kubai O. V. (2026) On the peculiarities of using polynomial prediction sequences in intelligent data analysis algorithms under convergence conditions.
14. Khizar Farooq, Aljethi Reem Abdullah, Ejaz Hussain, Muhammad Amin S. Murad. (2025) Chaos, Lyapunov exponent, and sensitivity demonstration of the coupled nonlinear integrable model with soliton solutions[J]. *AIMS Mathematics*, 10(10): 22929-22957. doi: [10.3934/math.20251019](https://doi.org/10.3934/math.20251019)
15. Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. (2007) Recurrence plots for the analysis of complex systems // *Physics Reports*. Vol. 438, No. 5–6. P. 237–329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
16. Riley, W. J. (2008). Handbook of frequency stability analysis. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology. NIST Special Publication 1065. <https://doi.org/10.6028/NIST.SP.1065>
17. Turbal, Y., Bomba, A., Sokh, A., Radoveniuk, O., Turbal, M. (2019). Pyramidal method of small time series extrapolation. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 10(4), 122–130.

References

1. Turbal Y. V., Kubai O. V. (2023) The polynomial forecasts improvement based on the algorithm of optimal polynomial degree selecting. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 6, no. 4 (126), pp. 17–26.
2. Turbal, Y., Turbal, M., Kubai, O., Smirnov, D., Melnychuk, M. Forecasting method based on averaging a polynomial extrapolation sequence. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. No. 8. P. 326–329. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.102>.
3. Wang X., Hyndman R. J., Li F., Kang Y. (2023) Forecast combinations: An over 50-year review. *International Journal of Forecasting*, vol. 39, no. 4, pp. 1518–1547.
4. López-Oriona A., Montero-Manso P., Vilar J. A. (2025) Time series clustering based on prediction accuracy of global forecasting models. *Knowledge-Based Systems*, vol. 312, article 113221.
5. Şen B., Ye H., Sugihara G. (2024) Detecting stochasticity in population time series using a non-parametric test of intrinsic predictability. *Methods in Ecology and Evolution*, vol. 15, no. 9, pp. 1741–1754.
6. Hassani H., Silva E. S., Ghodsi M. (2025) White Noise and Its Misapplications: Impacts on Time Series Model Adequacy and Forecasting. *Stats*, vol. 7, no. 1, pp. 8–23.
7. Karmaker S., Hossain M., Rahman M. et al. A Review of Time-Series Forecasting Algorithms for Industrial Manufacturing Systems. 2024. <https://doi.org/10.3390/machines12060380>.
8. Shah, Dhawani & Thaker, Manishkumar. (2024). A Review of Time Series Forecasting Methods. International journal of research and analytical reviews. 11. 749. 10.1729/Journal.38816.
9. Giantsidi A., Tarantola A. (2025) Deep learning for financial forecasting: A review of recent trends. Finance Research Letters, vol. 74, article 106885.
10. Li X., Zhang Y., Chen H. et al. (2025) Enhancing financial time series forecasting with hybrid Deep Learning: CEEMDAN-Informer-LSTM model. Applied Soft Computing, vol. 168, article 112345.
11. Saunoriene L., Mockus J., Katkevičius A. (2025) Short-term time series prediction based on evolutionary interpolation of Chebyshev polynomials with internal smoothing. Soft Computing, vol. 29, no. 1, pp. 1–15.
12. Salinas D., Flunkert V., Gasthaus J. (2017) DeepAR: Probabilistic Forecasting with Autoregressive Recurrent Networks. arXiv preprint arXiv:1704.04110.
13. Turbal Y. V., Kubai O. V. (2026) On the peculiarities of using polynomial prediction sequences in intelligent data analysis algorithms under convergence conditions.
14. Khizar Farooq, Aljethi Reem Abdullah, Ejaz Hussain, Muhammad Amin S. Murad. (2025) Chaos, Lyapunov exponent, and sensitivity demonstration of the coupled nonlinear integrable model with soliton solutions[J]. *AIMS Mathematics*, 10(10): 22929-22957. doi: [10.3934/math.20251019](https://doi.org/10.3934/math.20251019)
15. Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. (2007) Recurrence plots for the analysis of complex systems // *Physics Reports*. Vol. 438, No. 5–6. P. 237–329. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
16. Riley, W. J. (2008). Handbook of frequency stability analysis. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology. NIST Special Publication 1065. <https://doi.org/10.6028/NIST.SP.1065>
17. Turbal, Y., Bomba, A., Sokh, A., Radoveniuk, O., Turbal, M. (2019). Pyramidal method of small time series extrapolation. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 10(4), 122–130.

Історія статті:

Отримано: 14.05.2026 Доопрацьовано: 20.05.2026 Прийнято до друку: 23.05.2026 Опубліковано: 29.05.2026