

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2026-63-30>

УДК 004.416.3:004.855.5

Строєва Вікторія Олексіївна, к.ф.-м.н., доцент

<https://orcid.org/0000-0001-8890-9056>

Жигалева Софія Павлівна, магістрант

<https://orcid.org/0009-0001-0212-7000>

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АДАПТИВНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ, ЗДАТНОЇ ПІДТРИМУВАТИ ПЕРСОНАЛІЗОВАНЕ НАВЧАННЯ

Строєва В.О., Жигалева С.П. Математичне моделювання адаптивної системи навчання, здатної підтримувати персоналізоване навчання. Розглянуто актуальну проблему автоматизованої оптимізації параметрів алгоритмів машинного навчання у сфері проєктування комп'ютеризованих освітніх систем. Перехід від традиційних методів до адаптивних моделей навчання, що враховує індивідуальні особливості, когнітивні профілі та темп роботи здобувачів освіти, зумовлений стрімкою цифровою трансформацією. Мета роботи полягала у розробці математичної моделі адаптивної системи навчання на основі нечіткої логіки та штучних нейронних мереж для підтримки персоналізованого навчання. У дослідженні застосовано методи теорії нечітких множин, нейромереж та інтелектуального аналізу даних. Проєктування та симуляції реалізовано в середовищі MATLAB із використанням пакетів Fuzzy Logic Toolbox та системи ANFIS. Емпіричною базою слугували реальні поведінкові дані Дніпровського державного технічного університету. У ході експериментів проведено порівняльний аналіз трьох підходів: класичної нечіткої моделі, запропонованої нейро-нечіткої моделі та її модифікованої ітерації. Доведено, що розроблена ANFIS-модель ефективно поєднує експертні педагогічні знання із самонавчанням нейромереж. Автоматично згенерована база з 243 правил дозволила врахувати приховані нелінійні закономірності, часові витрати та глибину засвоєння знань. Результати підтвердили гнучкість нейро-нечітких моделей, які забезпечують точне диференційоване формування вихідного керуючого впливу для побудови індивідуальної освітньої траєкторії. Практичне значення результатів полягає у можливості імплементації моделі для створення інтелектуальних освітніх платформ, систем e-learning та автоматизованого контролю знань здобувачів освіти. Механізм імітаційного прогнозу дозволяє оцінювати поточний стан та прогнозувати подальшу стратегію навчання без зміни структури системи.

Ключові слова: математичне моделювання, нечітка логіка, нейронні мережі, цифрова трансформація освіти.

Stroieva V., Zhyhaleva S. **Mathematical modeling of an adaptive learning system capable of supporting personalized learning.** The current problem of automated optimization of machine learning algorithm parameters in the field of computerized educational systems design is considered. The aim of the work was to develop a mathematical model of an adaptive learning system based on fuzzy logic and artificial neural networks to support personalized learning. The study used methods of fuzzy set theory, neural networks, and intelligent data analysis. Design and modeling were implemented in the MATLAB environment using the Fuzzy Logic Toolbox packages and the ANFIS system. The empirical basis was real behavioral data from the Dnipro State Technical University. During the experiments, a comparative analysis of three approaches was conducted: the classical fuzzy model, the proposed neuro-fuzzy model, and its modified iteration. It was proven that the developed ANFIS model effectively combines expert pedagogical knowledge with self-learning neural networks. The automatically generated database of 243 rules allowed us to take into account hidden nonlinear patterns, time costs, and the depth of knowledge acquisition. The results confirmed the flexibility of neuro-fuzzy models, which provide accurate differentiated formation of the initial control influence for building an individual educational trajectory. The practical significance of the results lies in the possibility of implementing the model for creating intelligent educational platforms, e-learning systems and automated knowledge control. The predictive modeling mechanism allows assessing the current state and predicting the further learning strategy without changing the structure of the system.

Keywords: mathematical modeling, fuzzy logic, neural networks, digital transformation of education.

Постановка наукової проблеми. На сучасному етапі стрімкий поступ у галузі апаратних та програмних технологій відкриває широкі перспективи для суттєвої оптимізації освітнього процесу. Наразі високим попитом на ринку освітніх сервісів користуються інформаційно-комп'ютерні комплекси, що вирізняються гнучкістю дидактичних ресурсів, здатні функціонувати на різноманітних програмно-апаратних платформах та підтримувати широкий спектр технологій віддаленого навчання, забезпечуючи при цьому ефективну інтеграцію з іншими інформаційними системами та навчальними системами.

Водночас, спостерігається інтенсивне розширення методологічного апарату, пов'язаного із застосуванням цифрових технологій у навчанні. Сюди відносяться такі концепції, як єдиний освітній простір, інтегроване освітнє інформаційне середовище, віртуальний університет, масові відкриті онлайн-курси та віртуальний клас. Дистанційні конференції, які проводяться на платформах типу Zoom, Webex, Meet, Jitsi, перетворилися не лише на дієві освітні інструменти, а й стали невід'ємною частиною повсякденного життя сучасної людини, уможливіючи не тільки організацію навчального процесу, а й проведення звичайних віртуальних зустрічей та спілкування.

Проте, чинні методології автоматизованої розробки та оптимізації навчальних курсів вирізняються низкою істотних недоліків, серед яких можна виокремити: обмежену предметну спеціалізацію, неналежний облік персональних особливостей учасників освітнього процесу, значну собівартість таких систем, недостатній рівень інтерактивності, а також обмежену адаптивність застосовуваних методів та алгоритмів навчання. Наразі відсутня уніфікована система, здатна повноцінно формувати індивідуальну освітню траєкторію та відповідати когнітивним здібностям і освітнім цілям студента, з урахуванням встановлених академічних стандартів.

Таким чином, створення інноваційних підходів для автоматизованої оптимізації параметрів алгоритмів машинного навчання загалом, і, зокрема, у сфері проєктування комп'ютеризованих освітніх систем, становить нагальну науково-прикладну проблему. Вона зумовлює необхідність проведення ґрунтовних теоретичних та емпіричних досліджень та полягає у необхідності розробки математично обґрунтованих моделей адаптивного навчання, здатних функціонувати в умовах невизначеності та забезпечувати персоналізацію освітнього процесу за допомогою сучасних методів штучного інтелекту. Основною метою представленої роботи є розробка математичної моделі адаптивної системи навчання на основі нечіткої логіки та штучних нейронних мереж, здатної підтримувати персоналізоване навчання.

Аналіз досліджень. Сучасна освітня система переживає стрімку цифрову трансформацію, що характеризується експоненціальним зростанням обсягу освітніх даних, поширенням різних форматів навчання та підвищеними очікуваннями щодо якості результатів навчання [1]. За таких обставин традиційні підходи до організації освіти, часто орієнтовані на середньостатистичного студента, виявляються все більш недостатніми. Це вимагає переходу до індивідуалізованих та адаптивних моделей навчання, здатних враховувати унікальні когнітивні профілі, попередні знання та темп навчання кожного студента. Так у роботі [2] описано застосування методу структурного моделювання (ISM) для побудови 5-рівневої когнітивної моделі студента (від запам'ятовування до обґрунтування). Автори описують, як когнітивні атрибути допомагають алгоритму прокласти персоналізовані навчальні треки.

Адаптивні системи навчання є одним з найперспективніших напрямків розвитку освітніх технологій, оскільки вони інтегрують можливості інформаційно-комунікаційних технологій з методами штучного інтелекту та математичним моделюванням [3]. Такі системи дозволяють автоматизувати аналіз навчальної діяльності, створювати персоналізовані освітні траєкторії та динамічно коригувати зміст і складність навчання. При цьому проблема полягає в обробці нечіткої, неповної та суперечливої інформації, що є неодмінною складовою освітнього процесу [4]. У цьому контексті методи нечіткої логіки відіграють вирішальну роль, сприяючи формалізації лінгвістичних педагогічних оцінок та експертних суджень у математичні моделі [5]. Теорія нечітких множин дозволяє описувати рівні знань, академічну успішність та мотиваційні характеристики не як жорсткі числові межі, а як ступені належності до конкретних якісних категорій. Це робить нечітку логіку ефективним інструментом для моделювання складних освітніх процесів [6].

Одночасно штучні нейронні мережі надають можливість автоматизованого навчання моделей на основі накопичених даних, що дозволяє виявляти приховані закономірності та прогнозувати результати навчання. Їх застосування в адаптивних системах навчання підвищує точність оцінки засвоєння матеріалу та покращує ефективність прийняття рішень щодо подальшої організації навчального процесу.

Інтеграція нечіткої логіки та штучних нейронних мереж у нейро-нечіткі моделі створює основу для побудови гібридних адаптивних систем навчання, які одночасно забезпечують інтерпретованість рішень та можливості самонавчання. Такі моделі ефективно поєднують як експертні педагогічні знання, так і статистичні характеристики навчальних даних, що є особливо важливим для сучасних інтелектуальних освітніх середовищ [7].

У нинішньому науковому дискурсі термін «електронне навчання» (e-learning) виходить за межі простого позначення процесу здобуття нових знань за допомогою різного роду програмних чи технічних засобів. Натомість, він комплексно охоплює та інтегрує всі концепції, що стосуються імплементації інформаційно-комунікаційних технологій у педагогічну практику. Загалом, найперспективніший вектор розвитку електронного навчання на сучасному етапі ґрунтується на впровадженні адаптивних технологій навчання, які розробляються з використанням методологій обробки великих даних (Big Data) та принципів штучного інтелекту. Робота [8] присвячена розробці алгоритмів адаптації для платформ e-learning, а саме розв'язанню фундаментальної проблеми

електронної освіти — низьку ефективність готових курсів через відсутність гнучкого підлаштування під конкретну людину. В основі роботи лежить принцип двохрівневої адаптації, який заміняє стандартні жорсткі алгоритми.

У дослідженні [9] автор представив використання алгебри скінченних предикатів та векторно-матричних форм для машинного аналізу знань. Такий підхід дозволяє оптимізувати потоки інформації в системах дистанційної освіти.

Автори роботи [10] розглянули проблему навчання математиці серед студентів «групи ризику», яка часто ускладнюється неоднорідними прогалинами у знаннях та відсутністю доступу до індивідуалізованого викладання. Традиційні педагогічні підходи зазвичай не здатні адаптуватися до таких індивідуальних розбіжностей, що призводить до стійкого розриву в академічних досягненнях. Отже, ця робота спрямована на вивчення ефективності адаптивних систем навчання (ALS) у персоналізації викладання математики, аналіз покращення освітніх результатів для студентів групи ризику. У дослідженні використано методи збору та аналізу даних у реальному часі за допомогою алгоритмів машинного навчання. Система динамічно оцінює поточні відповіді студентів, час виконання завдань та поведінкові індикатори, адаптуючи складність контенту, траєкторію вивчення тем та зворотний зв'язок відповідно до когнітивних потреб кожного учня. Було доведено, що інтеграція ШІ-платформ адаптивного навчання дозволяє ефективно реалізувати концепцію Mastery Learning (навчання до повного засвоєння). Система точно виявляє та усуває прогалини в базових математичних знаннях, що суттєво знижує рівень тривожності студентів перед математичними дисциплінами. Завдяки гнучкому темпу та релевантному контенту, індивідуальна залученість і збереження знань (retention) серед вразливих категорій учнів зростають більш ніж на 30%.

Автори роботи [11] представили аналіз математичного моделювання як «містка» між класичною педагогікою та цифровими технологіями індивідуалізації. Запропонована математична модель слугує алгоритмічною основою для програмістів та методистів при проектуванні вітчизняних інтелектуальних навчальних платформ. Результати експериментальних зрізів, наведених у збірнику матеріалів конференції, підтверджують підвищення якості засвоєння шкільного матеріалу в середньому на 18–22% за одночасного зниження витрат часу учнів на рутинне закріплення тем.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. На основі проведеного аналізу досліджень, в умовах сучасного викладання дисциплін математичного напрямку у вищій школі, була поставлена задача необхідності розробки математично обґрунтованих моделей адаптивного навчання, здатних функціонувати в умовах невизначеності та забезпечувати персоналізацію освітнього процесу за допомогою сучасних методів штучного інтелекту. Основною метою даної роботи була розробка математичної моделі адаптивної системи навчання на основі нечіткої логіки та штучних нейронних мереж.

Для досягнення зазначеної мети передбачалося проаналізувати методи штучних нейронних мереж в контексті завдань адаптації навчального процесу. Наступним етапом була розробка математичної моделі адаптивної системи навчання з використанням нейро-нечіткого підходу. Завершальним етапом передбачалося проведення аналізу функціонування розробленої моделі та оцінки її ефективності.

Отже, об'єктом даного дослідження є адаптивна система навчання. Сучасні інтелектуальні освітні платформи дедалі частіше використовують механізми штучного інтелекту для формування індивідуальних навчальних траєкторій, аналізу прогресу студента та прогнозування можливих труднощів у засвоєнні матеріалу. Ключовою технологією, яка забезпечує таку адаптивність, є машинне навчання.

У найбільш загальному визначенні машинне навчання (ML) — це сукупність методів, які дозволяють комп'ютерним системам автоматично вдосконалювати власні рішення, спираючись на аналіз даних. Інакше кажучи, ML забезпечує побудову математичних моделей, здатних виявляти приховані залежності в інформації та переносити цей досвід на нові ситуації.

На відміну від традиційного програмування, де правила поведінки системи задаються розробником, у машинному навчанні ці правила формуються автоматично під час тренування моделі на вибірці. Такий підхід особливо ефективний у навчальних середовищах, де поведінка студентів, їхні відповіді, швидкість засвоєння матеріалу та помилки утворюють великий обсяг поведінкових даних, придатних до аналізу.

Цей підхід дозволяє: оцінювати рівень знань студента в реальному часі; прогнозувати ймовірність помилки або пропуску матеріалу; автоматично добирати завдання відповідної складності; визначати оптимальну навчальну стратегію для конкретного користувача; формувати рекомендації щодо повторення матеріалу; виявляти аномалії у поведінці (надто швидкі, підозріло нетипові відповіді). Такі можливості роблять машинне навчання основою сучасних систем адаптивного навчання (Adaptive Learning Systems).

Процес побудови моделі ML складається з кількох обов'язкових етапів. Хоча в різних джерелах їх може бути сформульовано по-різному, всі підходи збігаються щодо наявності трьох фундаментальних складових: дані; ознаки; алгоритм навчання.

У ML дані є основним джерелом інформації для тренування моделей. У випадку адаптивних освітніх систем такими даними можуть бути: відповіді студента на тестові завдання; точність та час виконання вправ; історія перемикань між темами; показники зовнішніх сенсорних систем (у фізичних тренажерах); зміст виконаних робіт; непрямі поведінкові ознаки.

Якість моделі безпосередньо залежить від репрезентативності вибірки. Це твердження повністю узгоджується з природою адаптивних систем: якщо дані неповні або містять системні помилки, алгоритм формуватиме хибні висновки щодо рівня студента.

Ознака — це числове або категоріальне відображення конкретної властивості об'єкта. Для студентського профілю такими ознаками можуть бути: «швидкість відповіді», «ймовірність повторної помилки», «складність засвоєних тем», «частка правильних відповідей у попередніх модулях».

Процес створення та добору ознак (feature engineering) впливає на якість моделі не менше, ніж сам алгоритм, що підкреслюється також у навчальних матеріалах.

У задачах адаптивного навчання переважно застосовують регресійні моделі для оцінки прогресу, класичні класифікатори для прогнозування правильної відповіді, нейронні мережі для складних залежностей, нечіткі системи для роботи з невизначеністю, комбіновані нейро-нечіткі алгоритми, які поєднують інтерпретованість і адаптивність.

Для проектування електронних систем (ЕС) на основі нечіткої логіки використовується пакет розширення Matlab – Fuzzy Logic Toolbox, який підтримує всі стадії розробки нечітких систем. Вбудовані GUI-модулі забезпечують зручне середовище з графічним інтерфейсом. Інтерактивний режим розробки експертних систем як систем нечіткого виведення (СНВ) здійснюється з використанням GUI-модулів Fuzzy Inference System (FIS).

Якщо об'єкт управління (ОУ) відноситься до класу слабоформалізованих систем, то інформація про нього може бути фрагментарною, неповною, ненадійною і, можливо, неточною. У цих випадках для розробки бази знань і механізмів логічного виведення ЕС застосовується апарат нечіткої логіки. Нечіткі експертні системи (НЕС), або ЕС на основі нечіткої логіки, використовують в якості моделі представлення знань нечіткі продукційні правила ЯКЩО-ТО, сформульовані на природній мові. Ключовою перевагою побудови ЕС на основі логіко-лінгвістичного представлення нечітких експертних знань є компактне і адекватне представлення реальних ситуацій функціонування ОУ. Ідея включення неточної інформації в моделі суперечить тому, що завжди потрібна якомога вища точність – тому виникає розбіжність між актуальністю і точністю. Цю суперечність пояснює так званий принцип несумісності, сформульований Л. А. Заде: «У міру ускладнення системи наша здатність робити абсолютні, точні і значущі твердження про поведінку системи зменшується. У якийсь момент буде можливий обмін між точністю і релевантністю». Структура НЕС представлена на рис. 1.

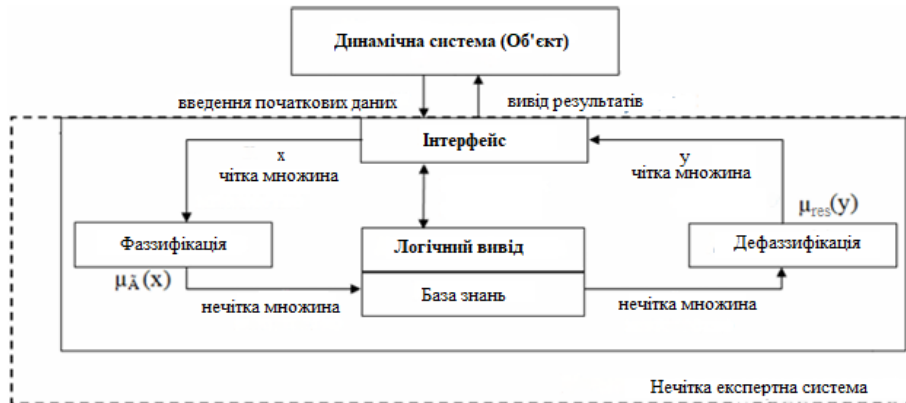


Рис. 1. Структура нечіткої експертної системи

Для ретельної оцінки ефективності розробленої моделі адаптивного навчання та перевірки її здатності точно відображати вплив різних педагогічних аспектів необхідно створити комплексний набір вхідних параметрів та відповідних експериментальних сценаріїв.

З цією метою були визначені основні вхідні змінні моделі та вказані їх числові значення. Ці значення призначені для відображення як типових, так і екстремальних станів, що характеризують залученість здобувачів до навчального процесу.

Використовуючи визначені набори вхідних параметрів, виконують обчислювальні симуляції на трьох різних моделях: традиційній нечіткій, запропонованій нейро-нечіткій та її модифікованій варіації.

Вхідні дані, застосовані для цих експериментів, було детально описано на певному етапі розробки моделі. Їх зміст відповідає реальній інформації, отриманій під час навчального процесу в Дніпровському державному технічному університеті та його відокремлених підрозділах. Для поставленої задачі було визначено відповідні правила системи адаптивного навчання, а також тип вихідних даних.

Аналіз функціонування системи здійснювався за допомогою модуля *Rule Viewer*, що дозволяє візуалізувати активацію нечітких правил та формування вихідного рішення. Усі змінні були попередньо нормалізовані до інтервалу $[0;1]$, що забезпечує коректність роботи нечіткої системи виведення. На етапі дослідження існує можливість введення значень вхідних змінних у *Rule Viewer*, що реалізує механізм імітаційного прогнозу, який дозволяє дослідити поведінку моделі без зміни її структури або параметрів навчання.

Отримані результати підтвердили, що модель не лише коректно інтерпретує поточний стан знань студента, але й може застосовуватися як інструмент прогнозування подальшої навчальної стратегії в адаптивних освітніх системах. Для загального аналізу розробленої нечіткої моделі також є корисною можливість візуалізації відповідної поверхні нечіткого висновку, яка дозволяє проаналізувати залежність значень вихідної змінної від окремих вхідних змінних.

На рисунку 2 представлено тривимірну поверхню візуалізації залежності подальшої стратегії навчання від кількості часу навчання та рівня глибини знань.

Очевидно, що за малих значень часу навчання та низького рівня глибини знань показник подальшої стратегії навчання змінюється незначно, що відповідає стабільному, але малоефективному режиму навчального процесу. У цій області система демонструє низьку чутливість до зміни вхідних параметрів.

Із поступовим збільшенням кількості часу навчання за умови досягнення певного рівня глибини знань спостерігається різке зростання значень показника по осі *OZ*. Це вказує на наявність граничного ефекту, після подолання якого відбувається перехід до більш адаптивної та інтенсивної стратегії навчання. Таким чином, ефективність подальшої навчальної стратегії суттєво зростає лише за умови одночасного зростання як часових витрат, так і глибини засвоєння матеріалу.

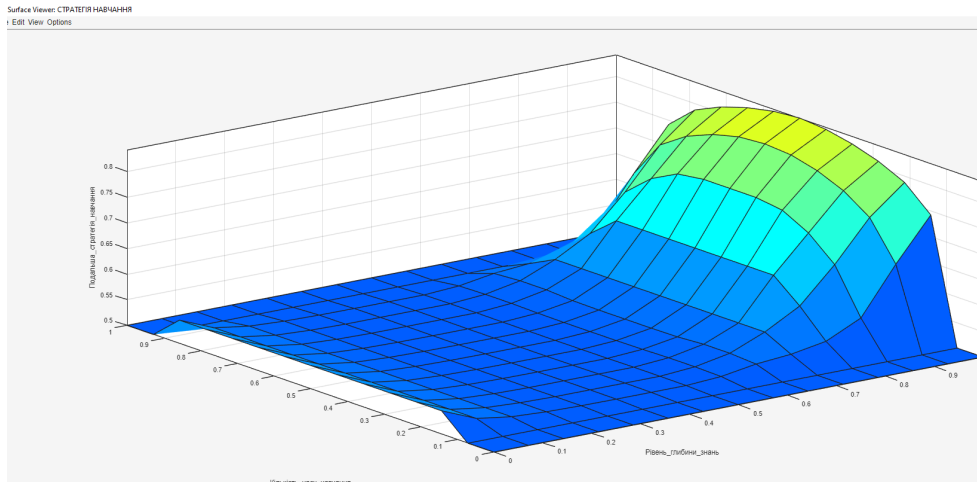


Рис. 2. Візуалізація поверхні вибору подальшої стратегії навчання

У верхній частині поверхні формується область насичення, де подальше збільшення часу навчання або рівня глибини знань не призводить до істотної зміни стратегії навчання. Це свідчить про досягнення оптимального або граничного рівня навчального навантаження, за якого доцільним є перехід від нарощування інтенсивності до нормального або коригувального режимів навчання.

Отримані результати підтверджують нелінійний характер взаємозв'язку між часом навчання, глибиною знань і вибором подальшої стратегії навчання. Вони дозволяють узагальнено проаналізувати вплив кількості часу навчання та рівня глибини знань на формування подальшої стратегії навчання.

Водночас для більш точного моделювання нелінійних залежностей та автоматизованого налаштування правил прийняття рішень доцільним є застосування адаптивної нейро-нечіткої системи виведення ANFIS, яка також є реалізованою у середовищі MATLAB. Її використання дає змогу поєднати переваги нечіткої логіки та нейронних мереж, що забезпечує підвищення точності моделі та адаптацію до навчальних даних.

Для прогнозування використано нечітку мережу TSK. Узагальнену схему виведення якої, при використанні M правил і N змінних x_j можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & \text{IF } (x_1 \cdot \text{IS} \cdot A_1^{(1)}) \cdot \text{AND} \cdot (x_2 \cdot \text{IS} \cdot A_2^{(1)}) \cdot \text{AND} \cdot \dots \cdot \text{AND} \cdot (x_n \cdot \text{IS} \cdot A_n^{(1)}), \\
 & \quad \text{THEN } y_1 = p_{10} + \sum_{j=1}^N p_{1j} \cdot x_j \\
 & \text{IF } (x_1 \cdot \text{IS} \cdot A_1^{(M)}) \cdot \text{AND} \cdot (x_2 \cdot \text{IS} \cdot A_2^{(M)}) \cdot \text{AND} \cdot \dots \cdot \text{AND} \cdot (x_n \cdot \text{IS} \cdot A_n^{(M)}), \\
 & \quad \text{THEN } y_M = p_{M0} + \sum_{j=1}^N p_{Mj} \cdot x_j
 \end{aligned}$$

Умова IF $(x_i \cdot \text{IS} \cdot A_i)$ реалізується функцією фазифікації, яка представляється узагальненою функцією Гаусса окремо для кожної змінної x_i :

$$\mu_A(x_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - c_i}{\sigma_i}\right)^{2 \cdot b_i}}$$

де $\mu_A(x_i)$ представляє собою оператор A_i .

У нечітких мережах доцільно задавати цю умову у формі алгебраїчного добутку, з якого випливає, що для k -го правила виведення:

$$\mu_A^{(k)}(x) = \prod_{j=1}^N \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - x_j^{(k)}}{\sigma_j^{(k)}} \right)^{k \cdot b_j^{(k)}}} \right]$$

При M правилах виведення агрегування вихідного результату мережі проводиться за формулою:

$$y = \sum_{i=1}^M \frac{w_i}{\sum_{j=1}^N w_j} \cdot \left(p_{i0} + \sum_{j=1}^N p_{ij} \cdot x_j \right),$$

яку можна записати у наступному вигляді:

$$y(x) = \frac{1}{\sum_{k=1}^N w_k} \cdot \sum_{k=1}^M w_k \cdot y_k(x),$$

де $y_k(x) = p_{k0} + \sum_{j=1}^N p_{kj} \cdot x_j$.

Присутні в цьому виразі ваги w_k інтерпретуються як значимість компонентів $\mu_A^{(k)}(x)$.

Ця модель інтегрує п'ять послідовних шарів:

1. Фазифікація: перетворює точні дані студента (наприклад, оцінка = 85, час = 40 сек) у нечіткі поняття («високий рівень знань», «середня швидкість») за допомогою функцій належності.
2. Генерація правил: перемножує отримані значення та визначає силу (вагу) виконання кожного педагогічного правила (наприклад: «ЯКЩО знання високі та швидкість середня...»).
3. Нормалізація: розраховує відносну вагу кожного правила, розподіляючи його силу на суму сил усіх наявних правил.
4. Дефазифікація: обчислює математичний результат для кожного правила за лінійною функцією Сугено (множить відносну вагу правила на його вагові коефіцієнти).
5. Суматор: додає результати всіх правил і видає одне чітке числове рішення — наприклад, точний рівень складності наступного завдання (коефіцієнт від 0 до 1).

Таким чином система навчається на помилках студента як нейромережа, але логіка її рішень залишається зрозумілою для викладача у вигляді правил.

Слід зазначити, що у другій моделі система сформувала вже 243 правила, на відміну від розроблених власноруч 19 правил у попередній моделі. Автоматично сформована база правил є результатом процесу навчання ANFIS, у ході якого система оптимізує параметри функцій належності та структуру правил з метою мінімізації похибки між вихідними значеннями моделі та навчальними даними. Кожному правилу призначено ваговий коефіцієнт, який у даному випадку дорівнює одиниці, що свідчить про рівнозначний внесок правил у процес нечіткого виведення.

Використання автоматичної генерації правил дозволяє врахувати приховані нелінійні закономірності у даних, які складно або неможливо формалізувати вручну. Таким чином, сформована ANFIS-модель поєднує адаптивність нейронних мереж із інтерпретованістю нечіткої логіки, що підвищує достовірність і практичну цінність отриманих результатів

Результати другого експерименту підтвердили чутливість нейро-нечіткої моделі до змін вхідних характеристик навчального процесу та її здатність адекватно коригувати вихідний керуючий вплив залежно від комбінації середніх і високих значень вхідних даних.

У таблиці 1 наведено результати обчислення вихідного параметра системи адаптивного навчання для різних наборів вхідних даних з використанням трьох підходів: класичної нечіткої моделі, нейро-нечіткої моделі та модифікованої нейро-нечіткої моделі. Вхідні параметри подано у вигляді векторів нормалізованих значень, що характеризують окремі аспекти навчального процесу.

Для перших двох наборів вхідних параметрів, які характеризуються низькими значеннями більшості компонентів при відносно високому значенні п'ятого параметра, усі три моделі формують порівняно низькі вихідні значення. При цьому нейро-нечітка модель демонструє дещо нижчі результати порівняно з класичною нечіткою моделлю, тоді як модифікована нейро-нечітка модель формує значно вищі вихідні значення, що свідчить про іншу логіку агрегації вхідних змінних.

У третьому та четвертому експериментальних сценаріях, де спостерігається зростання окремих вхідних параметрів, результати нечіткої та нейро-нечіткої моделей є близькими між собою.

Водночас модифікована нейро-нечітка модель забезпечує суттєво вищі вихідні значення, що вказує на посилений вплив адаптивних механізмів у модифікованій структурі.

Для наборів вхідних даних, що містять середні та підвищені значення окремих параметрів, спостерігається більш виражена диференціація між моделями. Зокрема, у п'ятому та восьмому випадках класична нечітка модель формує середні вихідні значення, тоді як нейро-нечітка та модифікована нейро-нечітка моделі демонструють протилежні тенденції, що свідчить про різну чутливість моделей до зміни структури вхідного вектора.

Таблиця 1. Результати обчислення вихідного параметра системи адаптивного навчання

Вхідні параметри	Нечітка модель	Нейро-нечітка модель	Модифікована нейро-нечітка модель
[0.2094;0.09829;0.08974;0.07265;0.9701]	0.16	0.125	0.468
[0.0514;0.06075;0.06075;0.07009;0.715]	0.232	0.194	0.531
[0.2094;0.09829;0.3376;0.07265;0.9701]	0.368	0.0459	0.45
[0.1667;0.2009;0.3034;0.2521;0.0812]	0.413	0.372	0.61
[0.7427;0.2443;0.37;0.2573;0.24]	0.5	0.531	0.238
[0.357;0.7509;0.8015;0.6753;0.9008]	0.51	0.45	0.852
[0.357;0.2443;0.37;0.6753;0.24]	0.539	0.61	0.862
[0.7427;0.7002;0.37;0.2573;0.24]	0.546	0.468	0.21
[0.07983 0.32 0.37 0.79 0.24]	0.595	0.238	0.094
[0.2094;0.3462;0.5769;0.6795;0.6966]	0.636	0.664	0.34

У сценаріях із високими значеннями більшості вхідних параметрів (шостий та сьомий рядки таблиці) модифікована нейро-нечітка модель формує найвищі значення вихідного параметра. Це вказує на її здатність адекватно враховувати комплексний вплив декількох високих вхідних характеристик та формувати більш виражений керуючий вплив.

Останній експериментальний набір вхідних даних характеризується зростанням усіх параметрів до середнього та вище середнього рівня. У цьому випадку всі три моделі демонструють зростання вихідного параметра, при цьому нейро-нечітка модель формує найбільше значення, що свідчить про ефективну адаптацію моделі до змішаних сценаріїв навчального процесу.

Представлені результати свідчать, що нейро-нечіткі моделі, особливо у модифікованому варіанті, забезпечують більш гнучку та диференційовану реакцію на зміну вхідних параметрів порівняно з класичною нечіткою моделлю. Це підтверджує доцільність використання нейро-нечіткого підходу для задач адаптивного навчання, де важливо враховувати складні та нелінійні взаємозв'язки між характеристиками навчального процесу.

Усі моделі демонструють узгоджену поведінку в загальних результатах та чутливу реакцію на зміну вхідних параметрів у проміжних випадках. При цьому модифікована нейро-нечітка модель забезпечує більш диференційоване та адаптивне формування вихідного параметра, що відповідає логіці побудови нечітких правил і структурі функцій належності. Це підтверджує коректність обраного математичного апарату та можливість практичного використання моделі для задач адаптивного навчання.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. У роботі було проаналізовано сучасний стан адаптивних систем навчання та обґрунтовано доцільність їх застосування в контексті цифрової трансформації в освіті. Доведено, що традиційні підходи до організації навчання не в повній мірі враховують індивідуальні особливості здобувачів освіти, що зумовлює необхідність використання інтелектуальних методів адаптації.

Запропоновано нейро-нечітку математичну модель адаптивної системи навчання, яка поєднує інтерпретованість нечіткої логіки з адаптивними властивостями штучних нейронних мереж. Розроблена модель дозволяє автоматично коригувати траєкторію навчання на основі індивідуальних характеристик учня, його рівня підготовки та результатів поточної навчальної діяльності.

Проведено аналіз функціонування запропонованої моделі, який продемонстрував її здатність забезпечувати персоналізацію навчального процесу. Отримані результати підтверджують

ефективність застосування нейро-нечіткого підходу для підвищення якості навчання та оптимізації процесу засвоєння знань.

Практичне значення результатів роботи полягає в можливості використання розробленої математичної моделі для створення та вдосконалення інтелектуальних освітніх систем, платформ дистанційного навчання та програмних засобів, що підтримують персоналізоване навчання. Запропонований підхід може бути адаптований до різних освітніх дисциплін та рівнів підготовки.

Перспективи подальших досліджень включають розширення моделі шляхом включення ефективних характеристик здобувачів, інтеграцію методів глибокого навчання та експериментальну перевірку ефективності запропонованої системи в реальних освітніх середовищах.

Список бібліографічного опису

1. Жалдак М.І., Рамський Ю.С. Інформаційні технології в освіті. К.: Либідь, 2012. 384 с.
2. Siyu Sun, Xiaopeng Wu, Tianshu Xu. A Theoretical Framework for a Mathematical Cognitive Model for Adaptive Learning Systems. *Behavioral Sciences* (Basel). 2023 May 12;13(5):406. <https://doi.org/10.3390/bs13050406>
3. Спірін О.М. Адаптивні освітні системи. К.: ПТЗН НАПН України. 2016. 288 с.
4. Кухаренко В.М. Дистанційне навчання. Харків: ХНУ, 2018. 240 с.
5. Заде Л. Нечіткі множини. К.: Наукова думка, 2010. 312 с.
6. M. Pikuliak, Development of an adaptive module of the distance education system based on a hybrid neuro-fuzzy network, *Proceedings of the 2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining&Processing (DSMP)*. Lviv, Ukraine, August 21-25, p. 44-49. 2020. <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204051>
7. Коско Б. Нечітка логіка та нейронні мережі. К.: Техніка, 2008. 416 с.
8. Barchenko, N. L., Tolbatov, V. A., Lavryk, T. V., Obodiak, V. K., Shelekhov, I. V., Tolbatov, A. V., Gnatyuk, S., & Tolbatova, O. (2022). Mathematical Model for Adaptive Technology in E-learning Systems. *International Journal of Modern Education and Computer Science (IJMECS)*, 14(4), 1–15.
9. Федорук П.І. Адаптивна система дистанційного навчання та контролю знань на базі інтелектуальних Інтернет-технологій / Федорук П.І. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2008. – 326 с.
10. Zhang Li, Priya Patel, Ethan Tan. Adaptive Learning Systems: Personalizing Mathematics Instruction for At-Risk Students. *International Journal of Paddisengeng Technology*. Vol. 2 No. 1 (2026). <https://doi.org/10.65224/jopate.v2i1.245>
11. Урум Г. Д., Притула Н. В. «Математичне моделювання як інструмент адаптивного навчання в закладах загальної середньої освіти»: Адаптивні технології управління навчанням: збірник матеріалів одинадцятої міжнародної конференції (Одеса-Київ, 22–24 жовтня 2025 р.). Одеса, 2025. – С. 11–14.

References

1. Zhaldak, M. I., & Ramskyi, Yu. S. (2012). *Informatsiini tekhnologii v osviti* [Information technologies in education]. Lybid. (in Ukrainian)
2. Sun, S., Wu, X., & Xu, T. (2023). A theoretical framework for a mathematical cognitive model for adaptive learning systems. *Behavioral Sciences*, 13(5), Article 406. <https://doi.org/10.3390/bs13050406>
3. Spyrin, O. M. (2016). *Adaptyvni osviti systemy* [Adaptive educational systems]. PITLT of NAPN of Ukraine. (in Ukrainian)
4. Kukharenko, V. M. (2018). *Dystantsiine navchannia* [Distance learning]. KhNU. (in Ukrainian)
5. Zadeh, L. (2010). *Nechitki mnozhyny* [Fuzzy sets]. Naukova Dumka. (in Ukrainian)
6. Pikuliak, M. (2020). Development of an adaptive module of the distance education system based on a hybrid neuro-fuzzy network. In *Proceedings of the 2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)* (pp. 44–49). IEEE. <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204051> (in Ukrainian)
7. Kosko, B. (2008). *Nechitka lohika ta neironni merezhi* [Fuzzy logic and neural networks]. Tekhnika. (in Ukrainian)
8. Barchenko, N. L., Tolbatov, V. A., Lavryk, T. V., Obodiak, V. K., Shelekhov, I. V., Tolbatov, A. V., Gnatyuk, S., & Tolbatova, O. (2022). Mathematical model for adaptive technology in e-learning systems. *International Journal of Modern Education and Computer Science*, 14(4), 1–15. (in Ukrainian)
9. Fedoruk, P. I. (2008). *Adaptyvna systema dystantsiinoho navchannia ta kontroliu znan na bazi intelektualnykh Internet-tekhnologii* [Adaptive system of distance learning and knowledge control based on intelligent Internet technologies]. Center of Information Technologies of Vasyl Stefanyk Precarpathian National University. (in Ukrainian)
10. Zhang, L., Patel, P., & Tan, E. (2026). Adaptive learning systems: Personalizing mathematics instruction for at-risk students. *International Journal of Paddisengeng Technology*, 2(1). <https://doi.org/10.65224/jopate.v2i1.245>
11. Urum, H. D., & Prytula, N. V. (2025). Matematychnе modeliuвання yak instrument adaptyvnoho navchannia v zakladakh zahalnoi serednoi osvity [Mathematical modeling as a tool for adaptive learning in institutions of general secondary education]. In *Adaptyvni tekhnologii upravlinnia navchanniam: zbirnyk materialiv odynadtsiatoi mizhnarodnoi konferentsii* [Adaptive learning management technologies: Proceedings of the 11th International Conference] (pp. 11–14). Odessa-Kyiv. (in Ukrainian)

Історія статті:

Отримано: 19.05.2026 Доопрацьовано: 21.05.2026 Прийнято до друку: 23.05.2026 Опубліковано: 29.05.2026