

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2025-60-35>

УДК.513.04

Бовсуновська Катерина Сергіївна, ст викладач

<https://orcid.org/0000-0003-0936-2246>

Зеленський Кирило Харитонович, д.т.н., професор

<https://orcid.org/0000-0003-1501-8214>

М'який Олександр Олександрович, магістрант

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НЕЛІНІЙНИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Бовсуновська К. С., Зеленський К. Х., М'який О. О. Керування зі зворотним зв'язком нелінійними об'єктами. Автоматичне керування зі зворотним зв'язком нелінійними об'єктами є актуальний напрямок у керуванні такими об'єктами. Широко розповсюдженим є оптимальне керування лінійними динамічними об'єктами. Для нелінійних об'єктів відомий підхід, що ґрунтується на використанні принципу максимуму, так зване програмне керування, коли вирішується задача визначення оптимальних траєкторій руху без урахування відхилення змінних стану об'єкту від реакції системи керування (сигналів на виході системи керування). Виконано аналітичний огляд літературних джерел, в яких пропонуються підходи до моделювання задач оптимального керування нелінійними об'єктами, зокрема розв'язання матричного рівняння Ріккати. У першому розділі статті запропоновано метод розв'язання матричного рівняння Ріккати, що ґрунтується на ітераційному числово-аналітичному підході, який надає можливість отримати розв'язок матричного рівняння Ріккати у квадратурах із подальшим використанням для визначення оптимальних траєкторій об'єкту, що підлягає автоматичному керуванню. У другому розділі статті запропоновано метод оптимального керування об'єктом біомедичного спрямування, які за своєю сутністю є нелінійні об'єкти, на прикладі оптимального керування з визначення оптимальної дози лікарських препаратів. Для визначення оптимальної траєкторії відповідної системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь застосовується ітераційний числово-аналітичний метод розв'язання відповідної задачі Коші. Наводяться результати математичного моделювання.

Ключові слова: гепатит С, звичайні диференціальні рівняння, імунні системи, ітераційний метод, матричне диференціальне рівняння Ріккати, нелінійні об'єкти, оптимальне керування.

Bosunovskay K., Zelensky K., Myaky O. Feedback control of nonlinear objects. Automatic feedback control of nonlinear objects is a relevant direction in the control of such objects. Optimal control of linear dynamic objects is widespread. For nonlinear objects, there is a known approach based on the use of the maximum principle, the so-called program control, when the problem of determining optimal motion trajectories is solved without taking into account the deviation of the object's state variables from the response of the control system (signals at the output of the control system). An analytical review of literature sources is performed, which offer approaches to modeling the problems of optimal control of nonlinear objects, in particular, the solution of the Riccati matrix equation. In the first section of the article, a method for solving the Riccati matrix equation is proposed, based on an iterative numerical-analytic approach, which provides an opportunity to obtain a solution of the Riccati matrix equation in quadratures with further use to determine the optimal trajectories of an object subject to automatic control. In the second section of the article, a method for optimal control of a biomedical object, which are inherently nonlinear objects, is proposed using the example of optimal control for determining the optimal dose of drugs. To determine the optimal trajectory of the corresponding system of nonlinear ordinary differential equations, an iterative numerical-analytic method for solving the corresponding Cauchy problem is used. The results of mathematical modeling are presented.

Keywords: hepatitis C, ordinary differential equations, immune systems, iterative method, Riccati matrix differential equation, nonlinear objects, optimal control.

Постановка проблеми

Автоматичне керування є однією з основних задач дослідження нелінійних систем з метою оптимізації їхнього функціонування. Оскільки задачі синтезу оптимального керування добре розвинуті тільки для лінійних систем керування, необхідно розробити відповідні методи синтезу оптимального керування для нелінійних об'єктів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблемі синтезу оптимального керування для нелінійних об'єктів присвячено кілька праць, зокрема, [1-4], в яких пропонується мінімізувати функціонал (2) із нелінійної системи (1) як псевдолінійну форму та побудові рекурсивної апроксимації як для нелінійної, так і для квадратичної функції витрат. Перше наближення отримується шляхом оцінювання матриці стану з початковими умовами, що призводить до лінійної інваріантної за часом системи, тобто матриці A і B вважаються сталими.

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = A(x_0)x^{(1)}(t) + B(x_0)u^{(0)}(t), \quad x^{(1)}(0) = x_0. \quad (1)$$

Для визначення сигналу керування використовують рекурсивні наближення:

$$\frac{dx^{(k)}(t)}{dt} = Z(x^{(k-1)}(t))x^{(k)}(t) + B(x^{(k-1)}(t))u^{(k-1)}(t), \quad x^{(k-1)}(0) = x_0. \quad (2)$$

Ці ітерації реалізуються також зі сталими матрицями, оскільки початкові значення функцій стану не змінюються.

По-перше, такий підхід не відповідає сутності ітераційного методу реалізації стосовно нелінійних систем динаміки. По-друге, у жодній із наведених публікацій не наведено алгоритмів розв'язання як матричного рівняння Ріккати, так і систем рівнянь відносно функцій стану. Судячи із наведених «результатів моделювання» для вирішення цих задач можна припустити, що застосовувалася різницева схема апроксимації систем рівнянь типу Рунге–Кутта, використання якої для систем нелінійних диференціальних рівнянь означеного порядку викликає сумніви.

Оптимальне керування нелінійними об'єктами

Розглянемо нелінійну систему у просторі станів

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Тут $x(t)$ – змінні стану, $u(t)$ – вектор керування, $x(0)$ – відомі початкові умови. Задача полягає у пошуку оптимального керування $u(t)$ шляхом мінімізації квадратичного функціоналу

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) F x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (4)$$

Для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax + Bu$$

синтез оптимального керування зі зворотним зв'язком відносно відхилення $e(t) = y(t) - y_{ia}$ вектора виходу $y(t)$ моделі від реальних значень виходу об'єкту y_{ia} , що досліджується, полягає у пошуку розв'язку матричного рівняння Ріккати відносно матриці посилення $K(t)$ і визначенні оптимального керування у вигляді

$$u(t) = -R^{-1} B K(t) y(t),$$

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) F e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q e(t) + u^T(e(t)) R u(e(t))] dt, \quad (5)$$

при цьому розв'язання матричного рівняння Ріккати здійснюється поза контуру зворотного зв'язку.

Основна відмінність матричного рівняння Ріккати для нелінійної системи керування від лінійної полягає у залежності матриці керування від змінних стану (фазових траєкторій). Цей факт означає, що на відміну від лінійного випадку, розв'язання матричного рівняння Ріккати треба виконувати у контурі зворотного зв'язку (на кожній ітерації ітераційного процесу).

Відокремимо у системі рівнянь (3) лінійну частину та матрицю керування $B(t)$. Матимемо таке векторно-матричне рівняння.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + N(x(t)) + B(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (6)$$

де A – матриця коефіцієнтів лінійної частини системи рівнянь, $N(x(t))$ – нелінійна частина системи рівнянь, $B(x(t))$ – матриця керування.

На першому кроці відшукуємо розв'язок лінійної частини системи (3). Після цього із використанням ітераційної схеми, [5], відшукуємо розв'язок нелінійної системи рівнянь (3) без урахування матриці керування $B(x(t))$.

Отриманий розв'язок відносно змінних стану $x(t)$ без урахування керуючих впливів заміщуємо у матрицю

$$S(x^{(k-1)}(t)) = B(x^{(k-1)}(t))R^{-1}B^T(x^{(k-1)}(t)).$$

На другому кроці отримуємо розв'язок матричного рівняння Ріккати за схемою, що викладена у першому розділі, але зі змінною матрицею керування і визначаємо перше наближення функції керування $u^{(1)}(t)$.

$$\frac{dK^{(k)}(t)}{dt} = -K^{(k)}(t)A - A^TK^{(k)}(t) + K^{(k)}(t)S(x^{(k-1)}(t))K^{(k)}(t) - Q. \quad (7)$$

Початкові умови для цього рівняння: $K(t_f) = 0$.

На третьому кроці отримуємо розв'язок системи рівнянь стану із урахуванням $u^{(1)}(t)$ і знову розв'язуємо матричне рівняння Ріккати.

Ці кроки повторюємо, поки не задовольниться нерівність

$$Px^{(m)}(t) - x^{(m-1)}(t)P < \varepsilon. \quad (8)$$

Тоді оптимальне керування задається як

$$u^{(m)}(t) = -R^{-1}B^T(x^{(m-1)}(t))K^{(m-1)}(t)x^{(m-1)}(t) \quad (9)$$

Після заміщення отриманого виразу для керування у рівняння стану (6) і його розв'язання отримаємо розв'язок рівняння відносно змінних стану на другій ітерації. Із урахуванням отриманого виразу для вектора стану повторюємо пошук розв'язання матричного рівняння Ріккати із урахуванням отриманої матриці керування $B(x^{(2)}(t))$, а значить, матриці $S^{(2)}(x^{(2)}(t))$, маючи на увазі виконання нерівності (8).

Керування дозами ліків при гепатиті С

Вірусні інфекції є серйозною проблемою для здоров'я та процвітання людини. Це справедливо не лише для гострих спалахів, наприклад, інфекції Ебола, коронавірусу тощо з високою обізнаністю громадськості, але й для хронічних різнопланових інфекцій (ВІЛ, гепатити В, С, D, діабет тощо). Зараження вірусом гепатиту С (ВГС) [1] викликає хронічні захворювання печінки, такі як цироз печінки та карцинома печінки. Як хронічна інфекція ВГС вражає 2–3% населення світу, ВГС є основною причиною трансплантації печінки.

Основний шлях передачі вірусів – серед активних споживачів ін'єкційних наркотиків (СІН), які легко передаються через спільне використання голочок і шприців.

Теорія керування знайшла широке застосування в біологічних та екологічних проблемах. У біомедичних проблемах теорія керування сприяє розробці оптимальних терапевтичних стратегій. Схема лікування зазвичай береться за контрольну змінну з метою мінімізації шкідливих наслідків захворювання. Наприклад, у моделюванні раку з метою мінімізації густини пухлини досліджують математичну модель пухлинно-імунних взаємодій і визначення оптимальної хіміотерапії, а також терапевтичних побічних ефектів.

Математична модель ВГС описується системою звичайних диференціальних рівнянь із затримкою:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (r_1 - d_1)S + b - r_1S(S + I) - (1 - c\eta_I)\alpha V_I S, \\ \frac{dI}{dt} = -d_2I + (1 - c\eta_I)\alpha V_I(t - \tau)S(t - \tau), \\ \frac{dV_I}{dt} = -d_3V_I + \left(1 - \frac{\eta_r + \eta_I}{2}\right)\beta I, \\ \frac{dV_{NI}}{dt} = -d_3V_{NI} + \frac{\eta_r + \eta_I}{2}\beta I. \end{cases} \quad (10)$$

Початкові умови:

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, V_I(0) = V_{I0}, V_{NI}(0) = V_{NI0}.$$

- $S(t)$ – популяція здорових гепатоцитів у печінці у момент часу t (кліт/мм³). Вони генеруються з постійною швидкістю b і гинуть з d_1 ;

- $I(t)$ – популяція інфікованих гепатоцитів у печінці в момент часу t (кліт/мм³). Здорові гепатоцити S інфікуються I зі швидкістю, пропорційною добутку числа здорових гепатоцитів S на вірусне навантаження V , з константою пропорційності k ;

- $V(t)$ завантаження віріонів.

Одним із головних досягнень у лікуванні гепатиту С є комбінація рибавіріну з інтерфероном- α . Рибавірин – це препарат, який перешкоджає розмноженню вірусу гепатиту С, і одночасно сигналізує клітини імунної системи організму про підвищення їх механізму захисту від вторгнення вірусу [9].

Оскільки динаміка ВГС описується системою нелінійних диференціальних рівнянь, виникає необхідність у розробці методу автоматичного керування, який суттєво відрізняється від методів керування зі зворотним зв'язком, що добре розвинуті для лінійних систем керування.

Математична модель ВГС представлена системою рівнянь (10).

Позначимо: $\gamma_1 = d_1 - r_1, \gamma_2 = d_2, \gamma_3 = \gamma_4 = d_3$;

$x_1 = S/S(0); x_2 = I/I(0), x_3 = V_I/V_I(0), x_4 = V_{NI}/V_{NI}(0)$.

Система диференціальних рівнянь відносно неінфікованих клітин, інфікованих клітин та вірусу набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} + \gamma_1 x_1 = b - r_1 x_1(x_1 + x_2) - (1 - u_1)\alpha x_3 x_1 = \\ \quad = b - N_{x_1}(t) + u_1 \alpha x_3(t) x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} + \gamma_2 x_2 = (1 - u_1)\alpha x_3(t - \tau) x_1(t - \tau) = \\ \quad = N_{x_2}(t - \tau) + u_1 \alpha x_3(t - \tau) x_1(t - \tau), \\ \frac{dx_3}{dt} + \gamma_3 x_3 = \beta x_2(t) - (u_1 + u_2)/2 \beta x_2(t), \\ \frac{dx_4}{dt} + \gamma_4 x_4 = (u_1 + u_2)/2 \beta x_2(t). \end{cases} \quad (11)$$

Останні складові у цих рівняннях визначають матрицю керування відносно інтерферону $u_1 = c\eta_I$ та рибавіріну $u_2 = c\eta_R$. Маємо задачу Коші.

Оскільки матриця керування $B(x(t))$ у матричному рівнянні Ріккати залежить від змінних стану системи, для розв'язання рівнянь Ріккати необхідно знайти розв'язок системи рівнянь (11) із нульовими значеннями керувань і після цього вирішувати матричне рівняння Ріккати (7).

Значення параметрів у безрозмірних змінних рівнянь системи (11), [3,4]:

$$b = 1, 0, r = 2, 0, S_{\max} = 3, 6, \alpha = 2, 2, \beta = 2, 9, d_1 = 0, 01, d_2 = 1, 0, d_3 = 5, 0.$$

Оскільки система рівнянь (11) є нелінійною, для пошуку розв'язків цієї системи застосуємо ітераційний числово-аналітичний метод [5, 12]. Із урахуванням відповідних інтегральних та алгебраїчних перетворень наближений розв'язок задачі Коші (після виконання двох ітерацій) отримано у такому вигляді:

$$\bar{x}_k(t) = x_k^{(2)}(t) = x_k^{(0)}(t) + b_0^{x_k} + e^{-\alpha_{x_k} t} \left[b_1^{x_k} g_1^{x_k}(\omega_{x_k} t) + b_2^{x_k} g_2^{x_k}(\omega_{x_k} t) \right] \quad (12)$$

Оцінимо відхилення між першою та другою ітерацією, обчисливши інтеграли

$$\Delta = \max_k \Delta_k = \int_0^{t_f} \left[x_k^{(2)}(t) - x_k^{(1)}(t) \right]^2 dt = 0, 16. \quad (13)$$

Розв'язання матричного рівняння Ріккати для нелінійної системи

Згідно із системою рівнянь (11) та числовими значеннями параметрів лінійної частини цієї системи матриця A має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.14 & -0.25 \\ 0.01 & -0.05 & 0.75 \\ 0.01 & 2.9 & -1.0 \end{bmatrix}$$

Згідно із загальним матричним рівнянням Ріккати (7) на першому кроці ітераційної процедури визначаємо вираз для $S(x)(t)$ із урахуванням виразів для $\bar{x}_k(t)$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x(t)) &= B(x^{(k-1)}(t))R^{-1}B^T(x^{(k-1)}(t)) = \\ &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \alpha \bar{x}_1(t) \bar{x}_3(t) & 0 \\ \alpha \bar{x}_2(t) \bar{x}_3(t) & 0 \\ -\beta/2 \cdot \bar{x}_2(t) & -\beta/2 \cdot \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \bar{x}_1(t) \bar{x}_3(t) & \alpha \bar{x}_2(t) \bar{x}_3(t) & -\beta/2 \bar{x}_2(t) \\ 0 & 0 & -\beta/2 \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} [\alpha \bar{x}_1(t) \bar{x}_3(t)]^2 & \bar{x}_1(t) \bar{x}_2(t) [\alpha \bar{x}^3(t)]^2 & -\frac{\beta}{2} \alpha \bar{x}_1(t) \bar{x}_3(t) \bar{x}_2(t) \\ {}^2 \bar{x}_1(t) \bar{x}_2(t) & [\alpha \bar{x}_3(t) \bar{x}_2(t)]^2 & -\frac{\beta}{2} \alpha \bar{x}_2^2(t) \bar{x}_3(t) \\ -\frac{\beta}{2} \alpha \bar{x}_1(t) \bar{x}_2(t) \bar{x}_3(t) & -\frac{\beta}{2} \alpha \bar{x}_2^2(t) \bar{x}_3(t) & \frac{1}{2} [\beta \bar{x}_2]^2 \end{bmatrix} \approx \\ &\approx [s_{j,i}^{(k)}(t) = s_0^{j,i} + e^{-s_4^{j,i} t} [s_1^{j,i} g_1(s_5^{j,i} t) + s_2^{j,i} g_2(s_5^{j,i} t)]]. \end{aligned} \quad (14)$$

Оскільки задача сформульована у класичному (зворотному) часі, запровадимо заміну $\tau = t_f - t$, яка призводить до такої задачі Коші

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} - K(\tau)A(\tau) - A^T(\tau)K(\tau) = -K(\tau)B(\tau)R^{-1}(\tau)B^T(\tau)K(\tau) + Q(\tau). \quad (15)$$

із початковими умовами

$$K(0) = F.$$

Застосуємо до цієї задачі інтегральне перетворення Лапласа.

$$K(p) = C^{-1}(p)[\bar{Q}(p) + F] + C^{-1}(p) \cdot L_t \{K(\tau)S(\tau)K(\tau)\}. \quad (16)$$

де

$$C(p) = A - p\bar{E}; \quad S(\tau) = B(\tau)R_1^{-1}(t)B^T(\tau).$$

Визначення матриці $C^{-1}(p)$ з огляду на її залежність від оператора Лапласа p , здійснюється із використанням відповідного алгоритму.

$$D = (C - pE)^{-1} = \frac{1}{\Delta_D} [d_{k,j} p^j]_{k,j=\overline{1,6}}.$$

Для задачі із матрицею коефіцієнтів A визначник має вигляд

$$\Delta_D = 432 - 12p - 422p^2 - 153p^3 + 22p^4 + 12p^5 + p^6.$$

Корені – полюси системи рівнянь:

$$[-6,1450 \pm i0,2672]; -1,8430 \pm i0,2350; 3,4858; 0,8902.$$

Елементи зворотної матриці $D = d_{k,j}(p)$.

$$d_{k,j} = \sum_{i=0}^n f_{j,i=1}^k p^i.$$

Пошук розв'язання рівняння (16) здійснюємо за ітераційною схемою. У лінійному наближенні маємо:

$$K^{(0)}(p) = C^{-1}(p)[Q/p + F]. \quad (17)$$

Визначимо нелінійну частину розв'язку матричного рівняння Ріккати. Матриця C системи рівнянь стану у просторі зображень за Лапласом залежить від оператора p , тобто є функціональна.

Позначимо $C^{-1}(p)$ зворотну до неї матрицю.

$$\bar{N}(p) = C^{-1}(p) \cdot L_t \{K^{(0)}(t)SK^{(0)}(t)\} = C^{-1}(p) \cdot D(p).$$

Щоб отримати вираз для $D(p)$, необхідно привести добуток функцій вигляду

$f_j^{(0)}(t) \cdot f_i^{(0)}(t)$ до суми функцій $g_1(t) + g_2(t)$, після чого до цих функцій можна застосовувати інтегральне перетворення Лапласа. Елементи зворотної матриці $c_{k,j}(p)$ отримано у вигляді після застосування алгоритму еквівалентного спрощення до вигляду дробово-раціональних функцій другого порядку отримано у вигляді

$$c_{k,j}(p) = \frac{1}{\Delta_C(p)} \sum_{i=0}^5 c_i^{k,j} p^i \approx \frac{\bar{c}_2^{k,j}}{p} + \frac{\bar{c}_0^{k,j} + \bar{c}_1^{k,j}}{\bar{c}_3^{k,j} + \bar{c}_4^{k,j} p + \bar{c}_5^{k,j} p^2}. \quad (18)$$

Отже, у результаті перелічених перетворень отримуємо вирази для нелінійної частини системи рівнянь Ріккати у вигляді

$$\bar{n}_{i,j}(p) = \frac{n_2^{i,j}}{p} + \frac{n_0^{i,j} + n_1^{i,j}}{n_3^{i,j} + n_4^{i,j} p + n_5^{i,j} p^2}. \quad (19)$$

Коефіцієнти дробово-раціональних виразів (18), (19) обчислюються за відповідним алгоритмом [5]. Тоді розв'язок системи рівнянь Ріккати у першому наближенні набуває вигляду

$$\bar{k}_{i,j}^{(1)}(p) = \bar{k}_{i,j}^{(0)}(p) + n_{i,j}^{(0)}(p) \rightarrow k_{i,j}^{(1)}(t); \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (20)$$

(із урахуванням симетричності матриці K). У просторі оригіналів цим виразам відповідають:

$$k_m^{(1)}(t) = e_0^{1,m} + e^{-e_4^{1,m}t} [e_1^{1,m} \varphi_1(e_5^{1,m}t) + e_2^{1,m} \varphi_2(e_5^{1,m}t)]; \quad m = \overline{1,6}. \quad (21)$$

Наступні ітерації реалізуються за аналогічною схемою.

$$k_m(t) = u_0^1 + e^{-u_4^1 t} [u_1^1 \varphi_1(u_5^1 t) + u_2^1 \varphi_2(u_5^1 t)]; \quad m = \overline{1, 6}. \quad (22)$$

Отже, керування набуває вигляду

$$u(t) = -R^{-1} B^T(t) K(t) x(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) = \eta_I \\ u_2(t) = \eta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^1 + e^{-u_4^1 t} [u_1^1 \varphi_1(u_5^1 t) + u_2^1 \varphi_2(u_5^1 t)] \\ u_0^2 + e^{-u_4^2 t} [u_1^2 \varphi_1(u_5^2 t) + u_2^2 \varphi_2(u_5^2 t)] \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Заміщення виразів для керувань u_1, u_2 у систему рівнянь динаміки (11) після виконання відповідних перетворень дає вирази для оптимальних змінних стану.

На рис. 1-4 представлені результати моделювання системи рівнянь Ріккати, оптимальних керувань та змінних стану задачі.

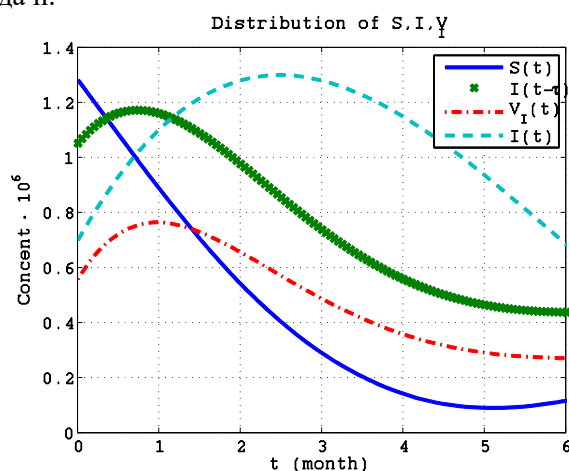


Рис.1. Графіки змінних моделі для $C = 5 \cdot 10^{-7}$, $D = 0$

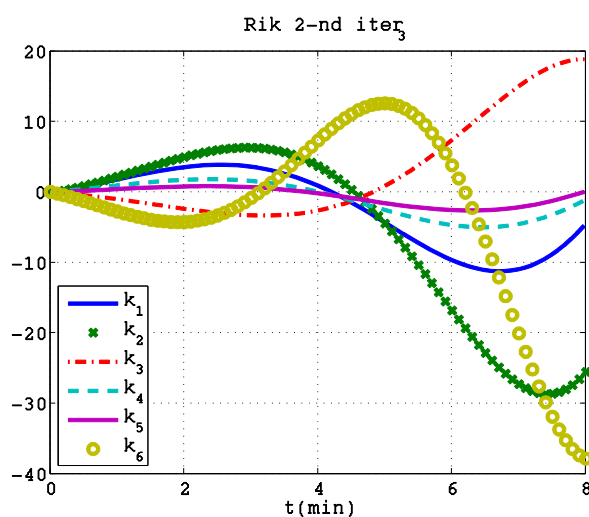


Рис. 2. Графіки рівнянь Ріккати на другій ітерації

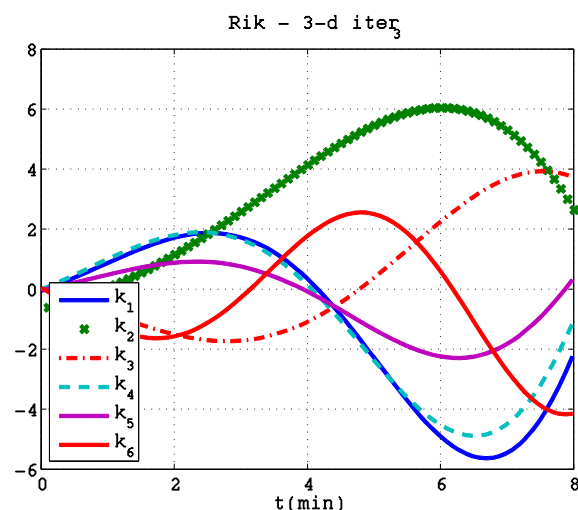


Рис. 3. Графіки рівнянь Ріккаті на третій ітерації

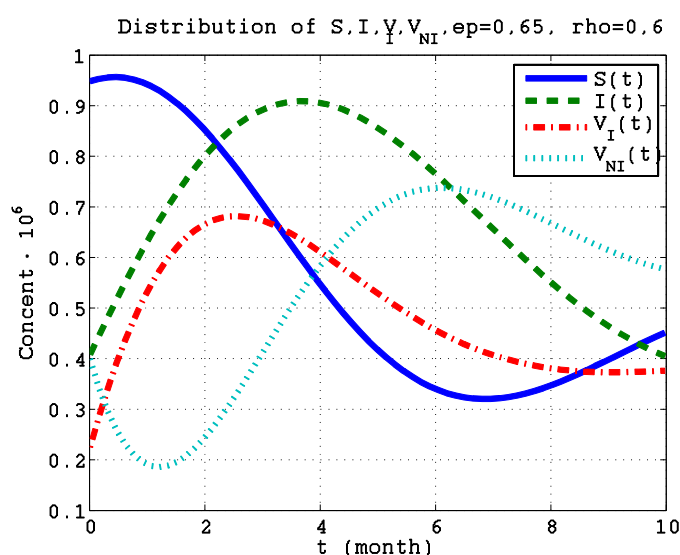


Рис. 4. Графіки змінних стану із керуванням

Висновки

1. Запропоновано ітераційний алгоритм розв'язання матричного диференціального рівняння Ріккаті відносно функціональної матриці керування (яка залежить від поточних значень функцій стану системи керування).

2. Запропоновано ітераційну процедуру розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь динаміки системи, що досліджується, що забезпечило отримання розв'язку системи у квадратурах.

3. Керування, отримані у результаті синтезу оптимального керування за принципом зворотного зв'язку, надали можливість отримати оптимальні значення як вектора стану системи, так і вектора виходу (реакції системи на керування).

4. Подальші дослідження викладеної проблеми пов'язані із синтезом алгоритмів керування для систем із розподіленими параметрами, динаміка яких описується диференціальними рівняннями із частинними похідними.

Список бібліографічного опису:

1. Babaei N., Salamci M. State dependent Riccati equation based model reference adaptive stabilization of nonlinear systems with application to cancer treatment. *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Cape Town, South Africa, 2014.
2. Babaei N., Salamci M. Personalized drug administration for cancer treatment using Model Reference Adaptive Control. *Journal of Theoretical Biology*, 2015. Vol. 371. pp. 24-44.
3. Banks H., Lewis B., Tran H. Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach, *Comput. Optim. Appl.*, 2007, 3. pp. 177-218.

4. Chakrabarty S., Joshi H. Optimally controlled treatment strategy using interferon and ribavirin for hepatitis C. *Journal of Biological Systems*, 2009. 17(1). pp. 97-110.
5. Зеленський К. Х., Ліщина Н. М. Математичне моделювання просторово-часових біомедичних процесів [Електронний ресурс]: монографія. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського. Електронні текстові дані (1 файл). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 260 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/72683>.
6. Itik M., Salamei M., Banks S. Optimal control of drug therapy in cancer treatment, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009, Vol. 71, pp. e1473–e1486.
7. Martin N., Pitcher A., Vickerman P. Optimal Control of Hepatitis C Antiviral Treatment. Programme Delivery for Prevention amongst a Population of Injecting Drug Users. *PLoS One*, 2011, V.6. No 8. e23309. 17 p.
8. Pachpute G., Chakrabarty S. Dynamics of hepatitis C under optimal therapy and sampling based analysis. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2013. 18. pp. 2202-2212.
9. Peregrino A., Esteve I Optimal control applied to hepatitis C therapy considering immune system *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*, 2018, V. 19, N. 1, pp. 9-35. DOI: http://dx.doi.org/10.18642/jpamaa_7100121911
10. Simen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SORE) method. *Annual Reviews in Control*, 2011, Vol 34, pp. 32-51.
11. Trofymchuk O., Zelensky K., Pavlov V., Bovsunovska K. Modeling of heat and mass transfer processes in the melting zone of polymer. *System Research and Information Technologies*, 2021, 4, pp. 68-80.
12. Zelensky K. Mathematical modelling of crystallization of polymer solutions in extruders. *System Research and Information Technologies*, 2023. 1. pp. 141-150.

References:

1. Babaei N., Salamei M. State dependent Riccati equation based model reference adaptive stabilization of nonlinear systems with application to cancer treatment. *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, Cape Town, South Africa, 2014.
2. Babaei N., Salamei M. Personalized drug administration for cancer treatment using Model Reference Adaptive Control. *Journal of Theoretical Biology*, 2015. Vol 371. pp. 24-44.
3. Banks H., Lewis B., Tran H. Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach. *Comput. Optim. Appl.*, 2007. 3. pp. 177-218.
4. Chakrabarty S., Joshi H. Optimally controlled treatment strategy using interferon and ribavirin for hepatitis C. *Journal of Biological Systems*, 2009. 17(1). pp. 97-110.
5. Zelensky K. Kh., Lishchina N. M. Mathematical modeling of spatio-temporal biomedical processes [Electronic resource]: monograph. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. Electronic text data (1 file). Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2024. 260p.
6. Itik M., Salamei M., Banks S. Optimal control of drug therapy in cancer treatment, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2009. Vol. 71. pp. e1473–e1486.
7. Martin N., Pitcher A., Vickerman P. Optimal Control of Hepatitis C Antiviral Treatment. Program delivery for prevention among a population of Injecting drug users. *PLoS One*, 2011. V.6. No. 8. e23309, 17 p.
8. Pachpute G., Chakrabarty S. Dynamics of hepatitis C under optimal therapy and sampling based analysis. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2013. 18. pp. 2202-2212.
9. Peregrino A., Esteve I Optimal control applied to hepatitis C therapy considering immune system *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*, 2018. V. 19. N. 1. pp. 9-35. DOI: http://dx.doi.org/10.18642/jpamaa_7100121911
10. Simen T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SORE) method. *Annual Reviews in Control*, 2011. Vol 34. pp. 32-51.
11. Trofymchuk O., Zelensky K., Pavlov V., Bovsunovska K. Modeling of heat and mass transfer processes in the melting zone of polymer, *System Research and Information Technologies*, 2021. 4. pp. 68-80.
12. Zelensky K. Mathematical modeling of crystallization of polymer solutions in extruders. *System Research and Information Technologies*, 2023. 1. pp. 141-150.