

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2025-59-23>

УДК 004.02

Марченко Олексій Олександрович, асистент

<https://orcid.org/0000-0002-5080-4811>

Марченко Олександр Іванович, к.т.н., доцент

<https://orcid.org/0000-0002-4537-3420>

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

АНАЛІЗ КЕРУВАННЯ ФОРМОЮ ДЕРЕВА ПОШУКУ MCTS ЗА ДОПОМОГОЮ КРИТЕРІЇВ ВИДУ «ГЛИБИНА-ШИРИНА»

Марченко О. О., Марченко О. І. Аналіз керування формою дерева пошуку MCTS за допомогою критеріїв виду «глибина-ширина». В цій статті розглядається перевірка та аналіз здатності способу вдосконалення пошуку по дереву методом Монте-Карло за допомогою контролю форми дерева пошуку MCTS-TSC (Monte-Carlo Tree Search with Tree Shape Control), який був розроблений авторами раніше, виконувати такий контроль. Принцип керування формою дерева пошуку у способі MCTS-TSC базується на застосуванні критеріїв DW (Depth-Width) виду «глибина-ширина». Апробація здатності MCTS-TSC контролювати та скеровувати в потрібному напрямку форму дерева пошуку в процесі його побудови проводилася на виконанні множини партій гри Connect Four, які були зіграні гравцями, що грали як за стандартною реалізацією пошуку по дереву методом Монте-Карло, яка називається MCTS-UCT (Monte-Carlo Tree Search with Upper Confidence bounds applied to Trees), так і за реалізацією способу цього пошуку з контролем форми дерева MCTS-TSC. З метою порівняння процесу побудови дерева пошуку стандартним способом MCTS-UCT і способом із застосуванням контролю за формою дерева MCTS-TSC були отримані дерева, побудовані після виконання однакової кількості ітерацій процесу пошуку і з різними значеннями налаштування параметрів критеріїв виду DW для контролю форми дерев в процесі їх побудови. Після цього була зібрана статистика форм побудованих дерев пошуку і виконаний порівняльний аналіз форми побудованих дерев пошуку і відмінностей процесу їх побудови обома способами пошуку. Проведена апробація та аналіз форми побудованих дерев пошуку показали, що спосіб пошуку по дереву за допомогою контролю форми дерева MCTS-TSC на основі встановлення певних параметрів формули критеріїв виду «глибина-ширина», не змінюючи загального асиметричного принципу побудови дерева пошуку, дозволяє скерувати процес цієї побудови до більш широкій і неглибокій форми дерева, або до більш вузької і глибокої форми. Отримані результати підтверджують здатність способу MCTS-TSC керувати формою дерева пошуку MCTS за допомогою критеріїв виду «глибина-ширина».

Ключові слова: пошук в дереві методом Монте-Карло, MCTS, MCTS-UCT, контроль форми дерева пошуку, критерії виду «глибина-ширина», MCTS-TSC.

Marchenko Oleksii, Marchenko Oleksandr Analysis of MCTS search tree shape control using "depth-width" kind criteria. This article examines the verification and analysis of ability of the MCTS-TSC (Monte-Carlo Tree Search with Tree Shape Control) improving technique, which was developed by the authors earlier, to perform such control. The principle of controlling the shape of the search tree in the MCTS-TSC technique is based on the application of DW (Depth-Width) criteria of the "depth-width" kind. The ability of the MCTS-TSC to control and correct the shape of the search tree during its construction was tested on multiple games of Connect Four played by players which used both the standard Monte Carlo tree search technique called MCTS-UCT (Monte-Carlo Tree Search with Upper Confidence bounds applied to Trees) and the MCTS-TSC technique with control of the tree shape. In order to compare the search tree construction process by the standard MCTS-UCT technique and the MCTS-TSC tree shape control technique, trees were obtained after performing the same number of iterations of the search process and with different setting values parameters of the DW kind criteria for controlling the shape of trees during their construction. After that, statistics of the constructed search trees shape were collected and comparative analysis of the constructed search trees shapes and differences in the process of their construction by both search techniques was performed. The approbation and analysis of the shape of the built search trees showed that the MCTS-TSC technique of tree search by controlling the shape of the tree based on setting certain parameters of the formulas of the "depth-width" kind criteria, without changing the general asymmetric principle of building the search tree, allows you to direct the process of this construction to a wider and shallow tree shape, or to a narrower and deeper shape. The obtained results confirm the ability of the MCTS-TSC technique to control the shape of the MCTS search tree using depth-width criteria.

Keywords: Monte-Carlo tree search method, MCTS, MCTS-UCT, search tree shape control, criteria of the "depth-width" kind, MCTS-TSC.

Постановка наукової проблеми.

Дерева рішень, які представляють зв'язки між інформаційними ресурсами певної задачі, є популярною, широко використаною і ефективною з алгоритмічної точки зору структурою даних для розв'язку цієї задачі. Сучасні задачі із галузі штучного інтелекту відзначаються надзвичайно великим, можна навіть сказати гігантським, обсягом інформації, в якій потрібно знаходити необхідні інформаційні елементи. Причому знаходити потрібно за прийнятний час, що, враховуючи гігантський обсяг інформації, є неймовірно складною задачею. Одним з методів пошуку у деревовидних структурах даних, який виявив високу ефективність знаходження найкращих рішень

в умовах таких вимог, є пошук по дереву методом Монте-Карло MCTS (Monte-Carlo Tree Search) [1]. Вже було запропоновано багато способів підвищення ефективності цього методу, але складність задач та обсяги даних цих задач також зростають. Тому проблема дослідження методів пошуку в інформаційних деревах рішень з метою створення і реалізації таких методів, щоб задовольнити жорстким вимогам задач галузі штучного інтелекту щодо часу виконання і використання пам'яті комп'ютерних систем наразі залишається і ще довго буде залишатися однією з найактуальніших задач цієї галузі.

Аналіз попередніх досліджень

Як відомо, одна ітерація пошуку методом MCTS складається з чотирьох етапів: 1) вибору; 2) розширення; 3) моделювання; 4) зворотного переобчислення. Ключовим елементом цього методу є його основна формула UCB1 (1), за допомогою якої в дереві пошуку відбувається оцінювання перспективності наступних можливих дій (ходів в іграх) і власне вибір однієї з вершин-нащадків поточної вершини, яка відповідає найбільш перспективному наступному ходу.

$$UCB1 = \frac{NodeWins}{NodePlayouts} + 2 * C_{UCB1} * \sqrt{2 * \frac{\ln(ParentPlayouts)}{NodePlayouts}} \quad (1)$$

де

NodeWins – кількість вигравів гри при взятті даної вершини;

NodePlayouts – кількість разів проходження гри через дану вершину;

ParentPlayouts – кількість разів проходження гри через батьківську вершину даної вершини;

C_{UCB1} – параметр для налаштування процесу пошуку.

Як зазначено вище, наразі вже існує велика кількість способів вдосконалення методу MCTS [1–4]. Ефективність цього методу підвищували різними способами, серед яких найбільш характерними є такі:

- 1) способи, що орієнтовані на вдосконалення виконання етапів MCTS, зокрема різні способи модифікації формули UCB1;
- 2) способи, що орієнтовані на особливості певних типів задач (як правило, ігор);
- 3) способи, що використовують машинне навчання;
- 4) способи, що використовують розпаралелення процесу роботи пошуку MCTS.

В деяких дослідженнях першого з цих напрямів [5–7] були зроблені цікаві спостереження. Наприклад, в роботі [6] була досліджена поведінка MCTS щодо форми дерева, яке будується під час виконання пошуку, тобто чи будуть побудовані дерева мати певну форму: чи будуть дерева з більш глибокою формою, чи з більш широкою формою, чи буде дотриманий якийсь баланс між глибиною і шириною дерева. В результаті було встановлено, що форма дерева пошуку MCTS залежить власне від алгоритмічної суті самої прикладної задачі (гри), що навіть невеликі нюанси в постановці задачі (правилах гри та системі підрахунку балів) можуть змінювати форму дерева пошуку, яке буде будуватися в процесі пошуку MCTS. В іншій роботі [7] було відзначено, що якщо параметру C_{UCB1} основної формули (1) пошуку MCTS встановлюють менші значення, то дерево буде будуватися більш глибоким і вузьким, а якщо цьому параметру встановлювати більші значення, то дерево буде будуватися ширшим. Але наразі дослідженням такого напрямку приділялося все ще недостатньо уваги, зокрема дослідженням можливості впливати корекцією форми дерева пошуку під час його побудови на ефективність пошуку MCTS.

Пропонована стаття присвячена перевірці та аналізу здатності розробленого авторами раніше в [8] і докладно розглянутого в [9] способу пошуку по дереву методом Монте-Карло за допомогою контролю форми дерева пошуку MCTS-TSC (Monte-Carlo Tree Search with Tree Shape Control) виконувати такий контроль і тим самим підвищувати ефективність пошуку по дереву методом Монте-Карло порівняно зі стандартним способом реалізації цього пошуку MCTS-UCT (Monte-Carlo Tree Search with Upper Confidence bounds applied to Trees) [1].

Головна ідея MCTS-TSC базується на критеріях DW (Depth-Width) виду «глибина-ширина» для контролю форми дерева пошуку під час його побудови. Повторимо стисло цю ідею для кращого розуміння подальшого матеріалу. Якщо відомо, якої типової форми (відношення ширини до глибини чи навпаки) відбувається побудова дерева пошуку методом MCTS для певної прикладної задачі (гри), і в певний момент побудови дерева процесом пошуку MCTS ця форма є, наприклад, ширшою, ніж типова форма дерева, то ми можемо спробувати перелаштувати параметри основної формули UCB1 (1) таким чином, щоб подальшу побудову дерева спрямувати в сторону отримання більш

глибокої форми дерева, і навпаки. В результаті, форма дерева MCTS надалі стане більш типовою для цієї гри (задачі) і ефективність пошуку MCTS може покращитися. Запропонована в [9] модифікація формули UCB1 (1), яка дозволяє виконувати зазначений контроль форми дерева пошуку, має такий вигляд:

$$UCB1_TSC = \frac{NodeWins}{NodePlayouts} + 2 * (C_{UCB1} + DW) * \sqrt{2 * \frac{\ln(ParentPlayouts)}{NodePlayouts}} \quad (2)$$

де доданок DW (Depth-Width) є значенням одного з критеріїв виду «глибина-ширина», який власне і вносить потрібні корекції в побудову дерева пошуку.

В роботі [9] були запропоновані і докладно розглянуті два критерії, WDC та DWC, виду DW. Там же показано, що така корекція форми дерева пошуку дійсно дає позитивний ефект щодо підвищення ефективності пошуку у знаходженні кращих рішень.

Метою даної роботи є експериментальне підтвердження здатності способу подальшого розвитку пошуку по дереву методом Монте-Карло, за допомогою контролю форми дерева пошуку MCTS-TSC на основі запропонованих критеріїв WDC та DWC виду «глибина-ширина», керувати формою дерева пошуку MCTS, спрямовуючи процес побудови дерева пошуку до більш широкої чи більш глибокої форми так, щоб вона наближалася до заданої еталонної (бажаної) для даної прикладної задачі (гри) форми.

Апробація та аналіз керування формою дерева пошуку MCTS

Експериментальна перевірка була виконана на грі Connect Four [10], степінь розгалуження якої $B=7$. Відзначимо декілька важливих для цього дослідження та аналізу фактів, які були встановлені раніше:

- 1) максимальна кількість ходів гри Connect Four дорівнює 42, оскільки поле гри має розмір 7×6 клітинок; характерною кількістю ходів до завершення гри за приблизно рівної сили гравців є діапазон від 31 до 37 ходів;
- 2) дерево пошуку гри Connect Four зазвичай має форму, в якій ширина дерева суттєво перевищує глибину для початкових ходів (оскільки її степінь розгалуження $B=7$), а для наступних ходів, коли кількість варіантів продовження гри, які потрібно дослідити, зменшується, форма побудованого дерева пошуку поступово стає все більш глибокою;
- 3) чим більшим є заданий бюджет кількості ітерацій пошуку для прийняття рішення про наступний хід, тим більш широкою стає кінцева форма (відношення ширини дерева до його глибини) побудованого дерева пошуку;
- 4) найбільш важливим для кінцевого виграшу є правильне виконання початкових ходів, коли ширина дерева пошуку все ще суттєво перевищує його глибину, а дійсно найкращі варіанти наступних ходів ще не визначені, тобто гарне дослідження наступних ходів має ключову роль на цьому етапі пошуку;
- 5) як правило, пошук методом MCTS знаходить краще рішення, якщо на початку пошуку чергового ходу приділяти більше уваги дослідженню нових, ще не досліджених чи мало досліджених гілок дерева, тобто спрямовувати дерево на розширення, а потім приділяти більше уваги варіантам ходів, які вже стали найбільш перспективними;
- 6) в результаті раніше виконаних досліджень [9] було з'ясовано, що найкращим значенням параметра C_{UCB1} для гри Connect Four є $C_{UCB1} = 0,55$.

Розглянемо методику проведення експериментів для апробації керування формою дерева пошуку MCTS за допомогою критеріїв виду «глибина-ширина».

Спочатку, при виконанні пошуку стандартним способом MCTS-UCT для гри Connect Four, були конкретизовані значення NW та ND типової форми дерева пошуку у двох випадках:

- для форми кінцевого дерева пошуку, коли найперспективніший наступний хід гри при певному заданому бюджеті максимальної кількості ітерацій пошуку вже визначений;
- для форми поточного дерева пошуку, яку приймає дерево після певної кількості ітерацій пошуку в процесі визначення чергового ходу в межах заданого бюджету.

Для першого випадку значення ширини та глибини побудованого дерева пошуку, тобто його форма, фіксувалися тільки для остаточного дерева після вичерпання всього бюджету кількості ітерацій пошуку.

Для другого випадку весь бюджет ітерацій пошуку був поділений на 10 інтервалів, після кожного з яких зберігалася інформація про поточні значення глибини та ширини вже побудованого на цей момент дерева пошуку.

Із того, що було з'ясовано на цій початковій стадії експериментів, для подальшого аналізу відзначимо наступне:

- при виконанні перших ходів гри і встановленому бюджеті кількості ітерацій 100000, середнім з округленням значенням форми кінцевого дерева пошуку (відношення ширини дерева NW до глибини дерева ND) виявилось значення $NW/ND = 4700$, а середнім з округленням значенням форми дерева пошуку після виконання половини ітерацій бюджету (50000) виявилось значення $NW/ND = 2700$;
- при виконанні перших ходів гри і встановленому бюджеті кількості ітерацій 200000, середнім з округленням значенням форми кінцевого дерева пошуку (відношення ширини дерева NW до глибини дерева ND) виявилось значення $NW/ND = 7200$, а середнім з округленням значенням форми дерева пошуку після виконання половини ітерацій бюджету (100000) виявилось значення $NW/ND = 4300$;
- при наступному збільшенні встановленого бюджету кількості ітерацій значення NW/ND змінювалися аналогічно для обох випадків, як для кінцевого дерева, так для дерева після половини виконаних ітерацій бюджету.

Враховуючи вищезазначені попередньо визначені факти, основна частина дослідження для підтвердження теоретичного обґрунтування можливості та механізму впливу запропонованих раніше критеріїв форми дерева WDC та DWC [8, 9] була виконана наступним чином:

1. Була виконана множина по 10 партій гри для апробації кожного з критеріїв контролю форми дерева пошуку, WDC та DWC.
2. Всі партії були виконані при встановленому максимальному бюджеті кількості ітерацій повторення пошуку 100000.
3. Для досягнення такого процесу пошуку, як зазначено вище у факті 5), для того, щоб на першій половині ітерацій пошуку критерії контролю форми дерева стимулювали розширення форми дерева, тобто виконання дослідження більшої кількості ходів, а на другій половині ітерацій пошуку навпаки стимулювали поглиблення форми дерева, тобто виконання кращого вибору серед множини вже визначених найбільш перспективних ходів, бажана форма дерева пошуку була встановлена відношенням $DFW/DFD = 2700$ (DFW – Desired Form Width, DFD – Desired Form Depth), тобто як середнє з округленням значення форми дерева пошуку, яке було отримане після виконання половини ітерацій бюджету (50000) на попередньому етапі дослідження.
4. Згідно із зазначеним вище фактом 6), дослідження виконувалося при встановленому значенні основного параметра $C_{UCB1} = 0,55$ для обох цих гравців в усіх випадках.
5. Значення поточної форми вже побудованого дерева пошуку фіксувалися з кроком 10000 ітерацій, починаючи від 10000 до завершення всього виділеного бюджету 100000 ітерацій при виконанні всіх 10 партій гри, і потім значення форми дерев після однакової кількості виконаних ітерацій пошуку були усереднені.
6. Значення поточної форми вже побудованого дерева пошуку фіксувалися при виконанні перших двох ходів, коли визначення потенційно найкращого ходу є найскладнішим.

Діаграми результатів, виконаних за описаною методикою проведення експериментів, для критерію WDC, при встановленому бюджеті кількості ітерацій пошуку 100000, показані на рис. 1, а для критерію DWC – на рис. 2.

Умовні позначення та кольори на цих рисунках мають таке значення:

- 1_UCT – гравець, який грав за стандартним способом MCTS-UCT, ходив першим;
- 2_TSC – гравець, який грав за способом MCTS-TSC з контролем форми дерева пошуку, ходив другим;
- по осі абсцис відкладалися значення кількості ітерацій пошуку (10000, 20000, ... , 100000), після яких визначалася поточна форма вже побудованих на цей момент дерев пошуку обох гравців;
- по осі ординат відкладалося поточне значення форми дерева пошуку NW/ND відповідного гравця, яку мало побудоване дерево пошуку після певної кількості ітерацій

пошуку;

- жовтим фоном виділене менше із значень форми дерева двох гравців, а зеленим фоном – більше із значень форми дерева двох гравців, при однаковій кількості ітерацій;
- червоним кольором виділені значення при кількості ітерацій 50000 і 60000, коли відбувалася зміна взаємовідношення форми дерев MCTS-UCT та MCTS-TSC (було більше значення у гравця 2_TSC, а стало у гравця 1_UCT).

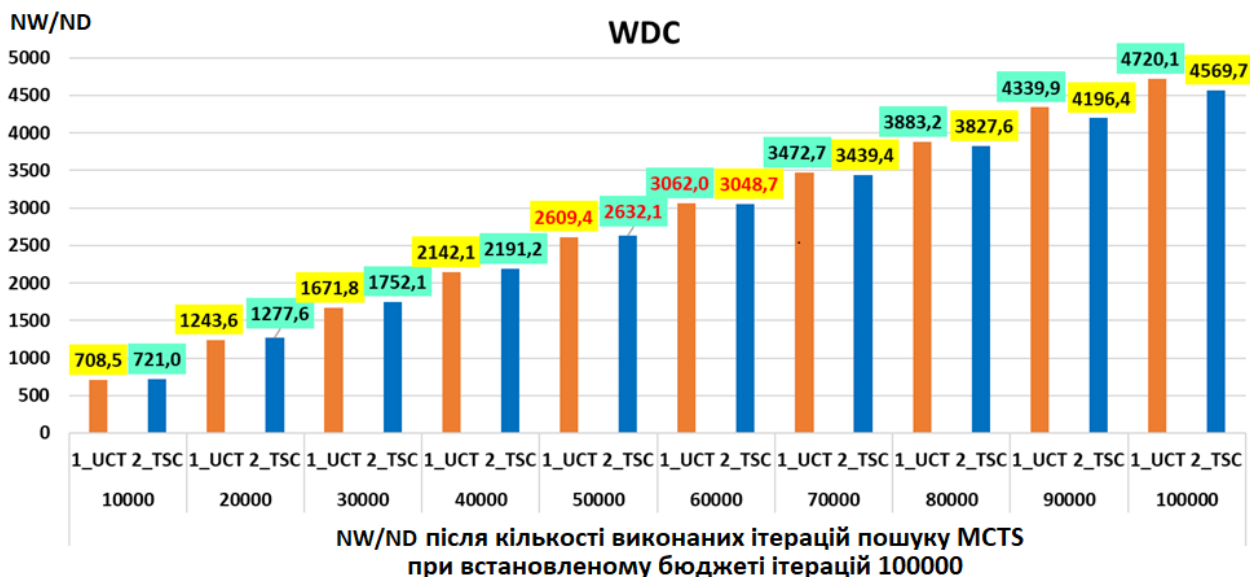


Рис. 1. Діаграма порівняння форми дерев пошуку MCTS-UCT та MCTS-TSC при використанні критерію контролю форми дерева WDC

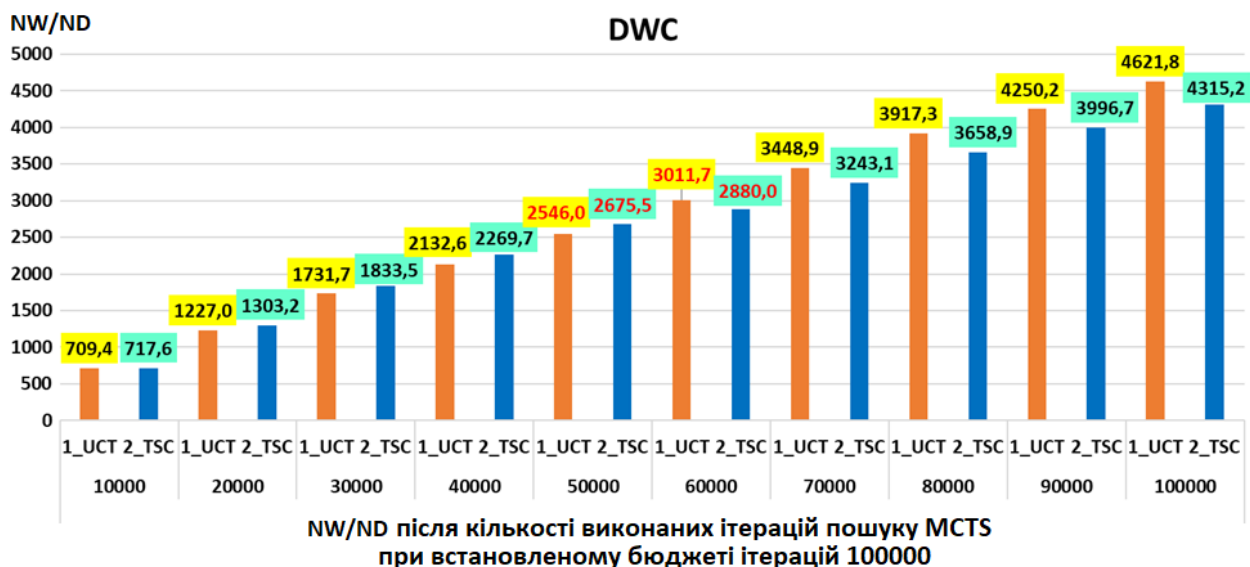


Рис. 2. Діаграма порівняння форми дерев пошуку MCTS-UCT та MCTS-TSC при використанні критерію контролю форми дерева DWC

Додатково до діаграм на рис. 1 та рис. 2 потрібно зазначити, що у випадку, якщо першим гравцем буде гравець TSC, а другим гравцем – UCT, а також при встановленні інших обчислювальних бюджетів кількості ітерацій пошуку та відповідних їм форм дерева, загальна картина впливу контролю форми дерева пошуку за допомогою критеріїв WDC та DWC не змінюється.

Пам'ятаючи, що при встановленому бюджеті кількості ітерацій пошуку 100000 бажаною (еталонною) формою дерева пошуку було встановлене відношення $DFW/DFD = 2700$, відзначимо важливі спостереження, які витікають із результатів, показаних на рис. 1 та рис. 2.

Спостереження 1. На початку пошуку, коли дерево тільки починає будуватися, форма дерева

MCTS для гри Connect Four є глибшою, ніж бажана. Тому, критерії керування формою дерева повинні спонукати процес пошуку у сторону більшої кількості досліджень нових ходів, тобто в сторону розширення дерева пошуку. Саме це можна й помітити після виконання кількості ітерацій пошуку від 10000 до 50000, оскільки значення відношення NW/ND у дерева пошуку гравця TSC на цій стадії пошуку завжди перевищує значення гравця UCT. Тобто, на цьому етапі пошуку вплив критеріїв керування формою дерева відповідає очікуваному, а саме, скеровує побудову дерева до більш широкої форми, порівняно з гравцем UCT.

Спостереження 2. Далі можна помітити, що після виконання 50000 ітерацій пошуку значення поточної форми дерева NW/ND (2609,4 для UCT і 2632,1 для TSC на рис. 1 та 2546 для UCT і 2675,5 для TSC на рис. 2 – виділено червоним кольором) вже наближаються до початково встановленого бажаного значення форми DFW/DFD = 2700, але ще не перевищують його. І в цьому випадку також контроль форми дерева пошуку все ще скеровує форму дерева у гравця TSC до більш широкої, ніж у гравця UCT, оскільки все ще має більше значення, ніж у гравця UCT. Але вже після 60000 ітерацій, коли, при постійному зростанні дерева пошуку вширину при його побудові, ширина дерева пошуку обох гравців перевищила встановлене бажане значення форми DFW/DFD = 2700 (3062 для UCT і 3048,7 для TSC на рис. 1 та 3011,7 для UCT і 2880 для TSC на рис. 2 – виділено червоним кольором), форма дерева пошуку гравця TSC отримала вже менше значення, ніж форма гравця UCT, а це значить стала трохи більш глибокою, ніж у гравця UCT. Тобто, коли форма дерева стала більш широкою, ніж бажана, використання критеріїв керування формою дерева почало скеровувати побудову дерева пошуку до більш глибокої форми, ніж має дерево гравця за стандартною реалізацією пошуку MCTS-UCT. Така поведінка вдосконаленого пошуку MCTS-TSC знову ж таки відповідає теоретичним очікуванням.

Спостереження 3. При подальшій побудові дерев пошуку обох гравців, коли кількість ітерацій пошуку найкращого наступного ходу продовжувала збільшуватися від 70000 до 100000, а форма обох дерев продовжувала зростати вширину (нагадаємо, це загальна властивість дерева пошуку MCTS для гри Connect Four), використання контролю форми дерева пошуку у способі MCTS-TSC продовжувало скеровувати процес побудови дерева гравця TSC до більш глибокої форми, ніж форма побудованого дерева пошуку у гравця UCT, оскільки, як видно з рис. 1 та рис. 2, значення відношення NW/ND у дерева пошуку гравця TSC на цій стадії пошуку завжди є меншим, ніж значення цього відношення у дерева пошуку гравця UCT. Тобто, і на цьому етапі процесу пошуку вплив критеріїв керування формою дерева WDC та DWC відповідає очікуваному, а саме, скеровує побудову дерева вже до більш глибокої, а не широкої, форми.

Висновки

Попередні дослідження визначили, що при застосуванні пошуку MCTS для однієї конкретної гри (прикладної задачі) пошук виконується ефективно, якщо під час пошуку будується дерево пошуку з певним видом форми дерева (наприклад, вузькі і глибокі або навпаки), в той час, як ефективним рішенням інших задач відповідають дерева, які мають форму дерева пошуку з іншим відношенням ширини до глибини.

В цій статті показано, що запропоновані в рамках способу пошуку MCTS-TSC критерії виду DW здатні виконувати контроль та корекцію форми дерева пошуку в процесі його побудови. Спосіб MCTS-TSC може бути використаний, наприклад, якщо завчасно відомо, яка форма дерева пошуку (з яким відношенням ширини до глибини) є типовою для ефективного пошуку кращих ходів для конкретної гри чи прикладної задачі, або такі знання можуть бути отримані за допомогою певного методу машинного навчання. Якщо така інформація може бути отримана для певних задач, то, враховуючи її, з'являються нові можливості для динамічного контролю форми дерева пошуку, що дозволяє скерувати подальший процес побудови дерева в потрібному напрямку і підвищити ефективність пошуку найкращих подальших дій. Проведена апробація та аналіз форми побудованих дерев пошуку показали, що спосіб вдосконалення пошуку по дереву за допомогою контролю форми дерева MCTS-TSC на основі встановлення певних параметрів формули критеріїв виду «глибина-ширина», не змінюючи загального асиметричного принципу побудови дерева пошуку, дозволяє скерувати процес цієї побудови до більш широкої форми дерева або до більш глибокої форми. Отримані результати підтверджують здатність способу MCTS-TSC керувати формою дерева пошуку MCTS за допомогою критеріїв DW виду «глибина-ширина».

Запропонований принцип контролю та управління формою дерев на основі критеріїв виду DW може бути застосований не тільки для пошуку по дереву методом MCTS, а й для довільних інших задач, що вимагають використання деревовидних структур даних, в яких потрібно

контролювати форму дерева під час його побудови.

В якості одного із напрямків подальших досліджень можна запропонувати дослідити застосування контролю форми дерева пошуку не тільки власне до пошуку методом MCTS, а й до інших методів та задач, в яких використовується представлення даних у вигляді дерева і для яких контроль форми дерева може вдосконалити їх розв'язок. Іншим напрямком може бути використання методів машинного навчання для динамічної корекції параметрів у критеріях виду DW.

Список бібліографічного опису

1. Cameron Browne, Edward Powley, Daniel Whitehouse, Simon M. Lucas, Peter I. Cowling, et al., "A Survey of Monte Carlo Tree Search Methods", *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, vol. 4, no. 1, pp. 1–43, March 2012. doi: 10.1109/TCIAIG.2012.2186810.
2. Marco Kemmerling, Daniel Lüticke, and Robert H. Schmitt, "Beyond games: a systematic review of neural Monte Carlo tree search Applications", *Applied Intelligence*, vol.54, 2024, pp. 1020–1046. doi: 10.1007/s10489-023-05240-w.
3. Jorik Jooken, Pieter Leyman, Tony Wauters, Patrick De Causmaecker, "Exploring search space trees using an adapted version of Monte Carlo tree search for combinatorial optimization problems", *Computers & Operations Research*, ISSN: 0305-0548, vol. 150, 2023, pp. 1–46. doi: 10.1016/j.cor.2022.106070.
4. T. Ou, Y. Lu, X. Wu and J. Cao, "Monte Carlo Tree Search: A Survey of Theories and Applications," *2022 3rd International Conference on Big Data, Artificial Intelligence and Internet of Things Engineering (ICBAIE)*, Xi'an, China, 2022, pp. 388–396, doi: 10.1109/ICBAIE56435.2022.9985899.
5. Gareth M. J. Williams, "Determining Game Quality Through UCT Tree Shape Analysis", *MSc. Thesis. Imperial College London*, 2010. [Online]. Available: <https://www.doc.ic.ac.uk/teaching/distinguished-projects/2010/g.williams.pdf>. Accessed on: Apr 15, 2025.
6. Hilmar Finnsson and Yngvi Björnsson, "Game-Tree Properties and MCTS Performance", *GIGA 2011: Proceedings of the 2nd International General Game Playing Workshop*, Jan. 2011, pp. 23–30. Available: <http://surl.li/hlmrys>. Accessed on: Apr 15, 2025.
7. Joel Veness, Kee Siong Ng, Marcus Hutter, William Uther, and David Silver, "A Monte-Carlo AIXI Approximation", *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 40, no. 1, pp. 95–142, January 2011. Available: <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/2016945.2016949>. Accessed on: Apr 15, 2025.
8. Oleksandr I. Marchenko and Oleksii O. Marchenko, "Monte-Carlo tree search with tree shape control", *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kyiv, Ukraine, 2017, pp. 812–817, doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100358.
9. Марченко О. О., «Подальший розвиток пошуку по дереву методом Монте-Карло за допомогою контролю форми дерева пошуку», *Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*, 2024, № 56, С.213–219. doi: 10.36910/6775-2524-0560-2024-56-27.
10. Connect Four, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Available: <http://surl.li/zhdnfm>. Accessed on: Apr 15, 2025.

References

1. Cameron Browne, Edward Powley, Daniel Whitehouse, Simon M. Lucas, Peter I. Cowling, et al., "A Survey of Monte Carlo Tree Search Methods", *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, vol. 4, no. 1, pp. 1–43, March 2012. doi: 10.1109/TCIAIG.2012.2186810.
2. Marco Kemmerling, Daniel Lüticke, and Robert H. Schmitt, "Beyond games: a systematic review of neural Monte Carlo tree search Applications", *Applied Intelligence*, vol.54, 2024, pp. 1020–1046. doi: 10.1007/s10489-023-05240-w.
3. Jorik Jooken, Pieter Leyman, Tony Wauters, Patrick De Causmaecker, "Exploring search space trees using an adapted version of Monte Carlo tree search for combinatorial optimization problems", *Computers & Operations Research*, ISSN: 0305-0548, vol. 150, 2023, pp. 1–46. doi: 10.1016/j.cor.2022.106070.
4. T. Ou, Y. Lu, X. Wu and J. Cao, "Monte Carlo Tree Search: A Survey of Theories and Applications," *2022 3rd International Conference on Big Data, Artificial Intelligence and Internet of Things Engineering (ICBAIE)*, Xi'an, China, 2022, pp. 388–396, doi: 10.1109/ICBAIE56435.2022.9985899.
5. Gareth M. J. Williams, "Determining Game Quality Through UCT Tree Shape Analysis", *MSc. Thesis. Imperial College London*, 2010. [Online]. Available: <https://www.doc.ic.ac.uk/teaching/distinguished-projects/2010/g.williams.pdf>. Accessed on: Apr 15, 2025.
6. Hilmar Finnsson and Yngvi Björnsson, "Game-Tree Properties and MCTS Performance", *GIGA 2011: Proceedings of the 2nd International General Game Playing Workshop*, Jan. 2011, pp. 23–30. Available: <http://surl.li/hlmrys>. Accessed on: Apr 15, 2025.
7. Joel Veness, Kee Siong Ng, Marcus Hutter, William Uther, and David Silver, "A Monte-Carlo AIXI Approximation", *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 40, no. 1, pp. 95–142, January 2011. Available: <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/2016945.2016949>. Accessed on: Apr 15, 2025.
8. Oleksandr I. Marchenko and Oleksii O. Marchenko, "Monte-Carlo tree search with tree shape control", *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kyiv, Ukraine, 2017, pp. 812–817, doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100358.
9. Marchenko O. O., «Further development of the Monte Carlo tree search method by controlling the search tree shape», *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*, 2024, № 56, pp. 213–219. doi: 10.36910/6775-2524-0560-2024-56-27.
10. Connect Four, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Available: <http://surl.li/zhdnfm>. Accessed on: Apr 15, 2025.