

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2025-59-07>

УДК 519.6

Брагінець Оксана Вікторівна, к.ф.-м.н., доцент

<https://orcid.org/0000-0003-2635-7203>

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, м. Миколаїв, Україна

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ.

Брагінець О. В. Використання математичного пакету Maple до розв'язання задач математичної фізики чисельними методами. В роботі розглянуто застосування математичного пакету Maple до розв'язування задач математичної фізики чисельними методами, таких як: змішана крайова задача для рівняння коливання струни, рівняння теплопровідності та задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Хоча змішані крайові задачі мають певні складнощі, існує потужний арсенал чисельних методів та програмних інструментів, які дозволяють їх розв'язувати. На прикладі програмного пакету Maple показано не тільки отримання чисельного розв'язку, а і його візуалізація у вигляді графіків, поверхонь, що допомагає в розумінні поведінки розв'язку та впливу різних крайових умов. Використання Maple для чисельного розв'язання задач математичної фізики дає змогу студентам-комп'ютерникам та інженерам сконцентруватися на суті проблеми, їм не доводиться витрачати час на складну реалізацію чисельних алгоритмів. Запис ДРЧП та умов досить зрозумілий, легко змінювати параметри рівняння, початкові/крайові умови та параметри сітки для швидкого дослідження поведінки системи, вбудовані алгоритми оптимізовані та добре перевірені, що забезпечує надійність обчислень. Вивчення чисельних методів передбачає їхню програмну реалізацію, що сприяє розвитку навичок програмування, особливо в області роботи з масивами даних, розробки ефективних алгоритмів та оптимізації коду. Фахівці з глибоким розумінням чисельних методів є затребуваними у багатьох галузях, включаючи ІТ-компанії, саме тому при вивченні таких методів ми поєднуємо застосування математичного пакету Maple та програмної реалізації на різних мовах програмування.

Ключові слова: диференціальні рівняння з частинними похідними, чисельні методи, метод сіток, рівняння математичної фізики, Maple.

Brahinets O.V. Using the mathematical program Maple to solve mathematical physics problems by numerical methods. The paper considers the application of mathematical program Maple to solve mathematical physics problems by numerical methods, such as a mixed boundary value problem for the string oscillation equation, the heat conduction equation and the Dirichlet problem for the Laplace equation. Although mixed boundary value problems have certain difficulties, there is a powerful arsenal of numerical methods and software tools that allow them to be solved. The example of the Maple software package shows not only obtaining a numerical solution, but also its visualization in the form of graphs and surfaces, which helps in understanding the behavior of the solution and the influence of various boundary conditions. Using Maple for numerical solution of mathematical physics problems allows computer science students and engineers to concentrate on the essence of the problem, they do not have to spend time on complex implementation of numerical algorithms. The writing of the numerical methods and conditions is quite clear, it is easy to change the equation parameters, initial/boundary conditions and mesh parameters for a quick study of the system behavior, the built-in algorithms are optimized and well-tested, which ensures the reliability of the calculations. The study of numerical methods involves their software implementation, which contributes to the development of programming skills, especially in the field of working with data sets, developing effective algorithms and optimizing the code. Specialists with a deep understanding of numerical methods are in demand in many industries, including IT companies, which is why when studying such methods we combine the use of the Maple mathematical package and software implementation in various programming languages.

Keywords: partial differential equations, numerical methods, grid method, equations of mathematical physics, Maple.

Постановка проблеми та аналіз досліджень.

Рівняння математичної фізики – це клас диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), які описують різноманітні фізичні явища. Невідома функція $U = U(t, x, y, z)$ в таких рівняннях залежить від багатьох змінних (зазвичай це час t та просторові координати x, y, z). Найчастіше використовуються рівняння другого порядку, оскільки згідно із законами механіки перша похідна – швидкість, а друга – прискорення. ДРЧП другого порядку поділяють на три класи в залежності від властивостей їх характеристик:

- 1) рівняння еліптичного типу описують різноманітні електричні, магнітні та гравітаційні поля (рівняння Лапласа, Пуассона, Гельмгольца);
- 2) рівняння гіперболічного типу описують хвильові процеси (рівняння коливання струни, хвильове рівняння для звукових та електромагнітних хвиль, рівняння газової динаміки);
- 3) рівняння параболічного типу описують процеси поширення тепла (теплопровідності) та дифузійні процеси (рівняння теплопровідності, дифузії, рівняння броунівського руху).

Окрім ДРЧП другого порядку математична модель задач математичної фізики містить ще додаткові умови: початкові та/або крайові. Ці умови потрібні для того, щоб виділити єдиний фізично змістовний розв'язок. У фізиці, механіці та інженерії часто зустрічаються змішані крайові

задачі, в яких комбінують різні типи умов (початкові та крайові). Використання чисельних методів до розв'язування таких задач зумовлене багатьма вагомими причинами: вони подають наближений розв'язок у вигляді набору чисел у вузлах сітки, що легко піддається аналізу та візуалізації, на відміну від аналітичного розв'язку, який може мати вигляд нескінчених рядів чи інтегралів, крім того, іноді вони дозволяють отримувати наближені розв'язки для задач, які є абсолютно недоступними для аналітичних методів.

Існує багато потужних програмних пакетів, які реалізують чисельні методи та надають інструменти для візуалізації результатів. Одним із таких пакетів є Maple. Maple є лідером у знаходженні аналітичних розв'язків ДРЧП, він володіє великою бібліотекою відомих розв'язків ДРЧП та різними методами, такими як метод характеристик, використання симетрій Лі та інтегральних перетворень. У випадку неможливості відшукування аналітичного розв'язку у Maple можна знайти чисельні розв'язки, підключивши спеціальні пакети. Також Maple дає потужні інструменти для візуалізації отриманих розв'язків ДРЧП у вигляді графіків, поверхонь, що допомагає зрозуміти поведінку розв'язку та вплив крайових умов. Тому саме Maple з його потужними символічними та чисельними можливостями, а також з можливістю візуалізації, роблять його ефективним для використання студентами, інженерами та дослідниками при вивченні рівнянь математичної фізики. Основи роботи в середовищі цього пакета та використання його до вивчення задач вищої математики можна знайти в [2-4].

Велика кількість прикладних задач у різних галузях науки зводяться до задач математичної фізики. Можливість звести складну фізичну задачу до розв'язання ДРЧП робить їх незамінним інструментом у наукових дослідженнях. Опис таких рівнянь та чисельні методи їх розв'язання можна знайти у багатьох посібниках (див., наприклад [1, 5-7]).

Метою роботи є показати застосування математичного пакета Maple до розв'язування чисельними методами основних задач математичної фізики таких, як рівняння теплопровідності, хвильового рівняння та рівняння Лапласа.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.

Найбільш поширеним методом розв'язання задач математичної фізики є метод сіток або метод скінчених різниць. Він є простим у розумінні та реалізації, ефективним для задач з простими геометричними областями. Сутність цього методу полягає в тому, що неперервну область, в якій шукають розв'язок задачі заміняють дискретною сіткою вузлів. Вузлами цієї сітки є точки $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, де h, k – відповідно крок по осях Ox та Ot , $i, j = 0, 1, \dots$. Невідому функцію $U(x, t)$ шукають наближено у вузлах сітки, використовуючи позначення $U_{ij} = U(x_i, t_j)$. Частинні похідні у вузлах сітки апроксимуються скінчено-різницеви співвідношеннями:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k}, & U_x &= \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h}, \\ U_{tt} &= \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}, & U_{xx} &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рівняння коливання струни. Розглянемо змішану крайову задачу для рівняння коливання струни:

$$U_{tt} = U_{xx}, \quad (2)$$

з граничними умовами:

$$U(0, t) = p(t), \quad U(L, t) = q(t), \quad (3)$$

та початковими умовами:

$$U(x, 0) = f(x), \quad U_t(x, 0) = g(x). \quad (4)$$

Розв'язок будемо шукати в області $D: \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq +\infty\}$. Початкові та крайові умови повинні бути узгодженими, тобто:

$$p(0) = f(0), \quad q(0) = f(L), \quad p'(0) = g(0), \quad q'(0) = g(L).$$

Використовуючи (1) замінимо задачу (2)-(4) її скінчено-різницевим аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (5)$$

$$U_{0,j} = p_j, \quad U_{n,j} = q_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$U_{i,0} = f_i, \quad U_{i,1} = U_{i,0} + kg_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Умови (6)-(7) задають значення функції $U(x, t)$ на границі області D . Якщо позначити через $\lambda = \frac{k}{h}$, то рівняння (5) зведеться до вигляду

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_{i,j} + \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Розв'язок різницевої задачі (5)-(7) рівномірно збігається з розв'язком крайової задачі (2)-(4) при $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, якщо $\lambda < 1$, тобто $k < h$.

Приклад реалізації методу сіток для задачі (2)-(4) в Maple.

```
restart;
dx := 0.05 :
dt := 0.025 :
c := 1 :
xmax := 1 :
tmax := 5 :
Nx := round(xmax/dx) :
Nt := round(tmax/dt) :
r := (c*dt/dx)^2 :

u := Array(0..Nt, 0..Nx, datatype=float[8]) :

for j from 0 to Nx do
    xj := j*dx;
    u[0,j] := xj*(2*xj-0.5); # f(x)
end do;

for j to Nx-1 do
    xj := j*dx;
    u[1,j] := u[0,j] + (1/2)*r*(u[0,j+1] - 2*u[0,j] + u[0,j-1]) + dt*cos(2*xj); # g(x)
end do;

for n from 0 to Nt do
    tval := n*dt;
    u[n,0] := tval^2; # p(t)
    u[n,Nx] := 1.5; # q(t)
end do;

for n to Nt-1 do
    for j to Nx-1 do
        u[n+1,j] := 2*(1-r)*u[n,j] + r*(u[n,j+1] + u[n,j-1]) - u[n,j];
    end do;
end do;
```

```
plots[display]([
    plots[listplot]([seq([j*dx, u[0,j]], j=0..Nx)], style=line,
        color=red, legend="t=0"),
    plots[listplot]([seq([j*dx, u[round(3/dt),j]], j=0..Nx)], style
        =line, color=blue, legend="t=3"),
    plots[listplot]([seq([j*dx, u[round(5/dt),j]], j=0..Nx)], style
        =line, color=green, legend="t=5")
], title="Форма струни в моменти часу t=0, 3, 5", labels=["x",
    "u"], labeldirections=[horizontal, vertical]);

plots[display]([
    plots[listplot]([seq([n*dt, u[n, round(0.3/dx)], n=0..Nt]),
        style=line, color=red, legend="x=0.3"),
    plots[listplot]([seq([n*dt, u[n, round(0.5/dx)], n=0..Nt]),
        style=line, color=blue, legend="x=0.5"),
    plots[listplot]([seq([n*dt, u[n, round(0.7/dx)], n=0..Nt]),
        style=line, color=green, legend="x=0.7")
], title="Графіки u(t) для x = 0.3, 0.5, 0.7", labels=["t", "u"],
    labeldirections=[horizontal, vertical]);

printf("Таблиця значень u(x, t) для t від 0 до 5 з кроком
    0.025:\n");
printf("  x  ");
for j from 0 to Nx do
    printf("%8.3f ", j*dx)
end do;
printf("\n");
for n from 0 to round(5/dt) do
    printf("t=%5.3f ", n*dt);
    for j from 0 to Nx do
        printf("%8.4f ", u[n,j])
    end do;
    printf("\n");
end do;
```

Розв'язок подається у вигляді таблиці значень шуканої функції $U(x, t)$ у вузлах сітки. Більш цікавим є отримання візуалізації розв'язків задачі таких як, форма струни в певний момент часу t або зміна $U(t)$ у фіксованих точках x (рис. 1).

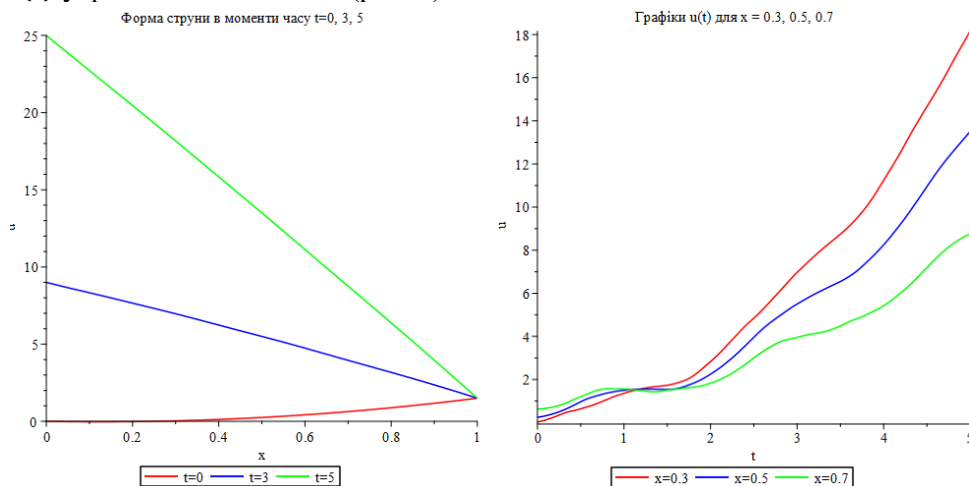


Рис. 1. Візуалізація розв'язків, отриманих для змішаної крайової задачі рівняння коливання струни в Maple.

Рівняння теплопровідності. Розглянемо ДРЧП параболічного типу на прикладі рівняння теплопровідності. Змішана крайова задача для такого рівняння має вигляд:

$$U_t = U_{xx}, \quad (9)$$

з граничними умовами:

$$U(0, t) = p(t), \quad U(L, t) = q(t), \quad (10)$$

та початковою умовою:

$$U(x, 0) = f(x). \quad (11)$$

Розв'язок будемо шукати в області $D: \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq +\infty\}$. Початкова та крайові умови повинні бути узгодженими, тобто:

$$p(0) = f(0), \quad q(0) = f(L).$$

Використовуючи (1) замінімо задачу (9)-(11) її скінчено-різницеvim аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (12)$$

$$U_{0,j} = p_j, \quad U_{n,j} = q_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad U_{i,0} = f_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (13)$$

Умови (13) задають значення функції $U(x, t)$ на границі області D . Якщо позначити через $\lambda = \frac{k}{h^2}$, то рівняння (12) зведеться до вигляду

$$U_{i,j+1} = \lambda U_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)U_{i,j} + \lambda U_{i+1,j}, \quad i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Процес розв'язання збігається і є стійким, якщо $\lambda \leq 0,5$, тобто $k < \frac{h^2}{2}$.

Приклад реалізації методу сіток для задачі (9)-(11) в Maple.

```
> restart;
with(plots):
# Параметри задачі
h := 0.1: # крок по x
k := 0.004: # крок по t
lambda := 0.4:
t1 := 0.1: # кінець розрахунку
# Число вузлів
Nx := floor(0.6/h):
Nt := floor(t1/k):
# Визначимо масив u[n,j] — значення u(x_j, t_n)
u := Array(0..Nt, 0..Nx):
# Початкові умови: u(x, 0) = cos(2x)
for j from 0 to Nx do
    xj := j*h:
    u[0,j] := cos(2*xj):
end do;
# Граничні умови
p := t - 6*t:
q := t - 0.3624:
# Обчислення значень за явною схемою
for n from 0 to Nt-1 do
    t := n*k:
    # Застосовуємо граничні умови
    u[n+1,0] := p((n+1)*k):
    u[n+1,Nx] := q((n+1)*k):
    for j from 1 to Nx-1 do
        u[n+1,j] := u[n,j] + lambda*(u[n,j+1] - 2*u[n,j] + u[n,j-1]):
    end do;
end do;
# Побудова графіків для t=0, t=t1/2, t=t1

plotT := proc (m)
    local points, j;
    points := [seq([j*h, u[tn,j]], j=0..Nx)];
    plot(points, style=pointline, color=purple, thickness=2, title
        =cat("t = ", m*k), labels=["x", "u(x,t)"])
end proc;

plots[display]([
    plotT(0),
    plotT(round((1/2)*Nt)),
    plotT(Nt)
],
    title="Розподіл температур у різні моменти часу",
    legend=["t=0", "t=t1/2", "t=t1"]
);

printf("Таблиця значень u(x,t):\n");
printf("  x  ");
for j from 0 to Nx do
    printf("%8.2f ", j*h)
end do;
printf("\n");

for n from 0 to Nt do
    printf("t=%4.3f ", n*k);
    for j from 0 to Nx do
        printf("%8.4f ", u[n,j])
    end do;
    printf("\n");
end do;
```

В рівнянні (9) функція $U(x, t)$ задає температуру в будь-якій точці стержня довжиною L на момент часу t . Візуалізація розподілу температур в різні моменти часу, отримана в Maple та Python, продемонстрована на рис. 2.

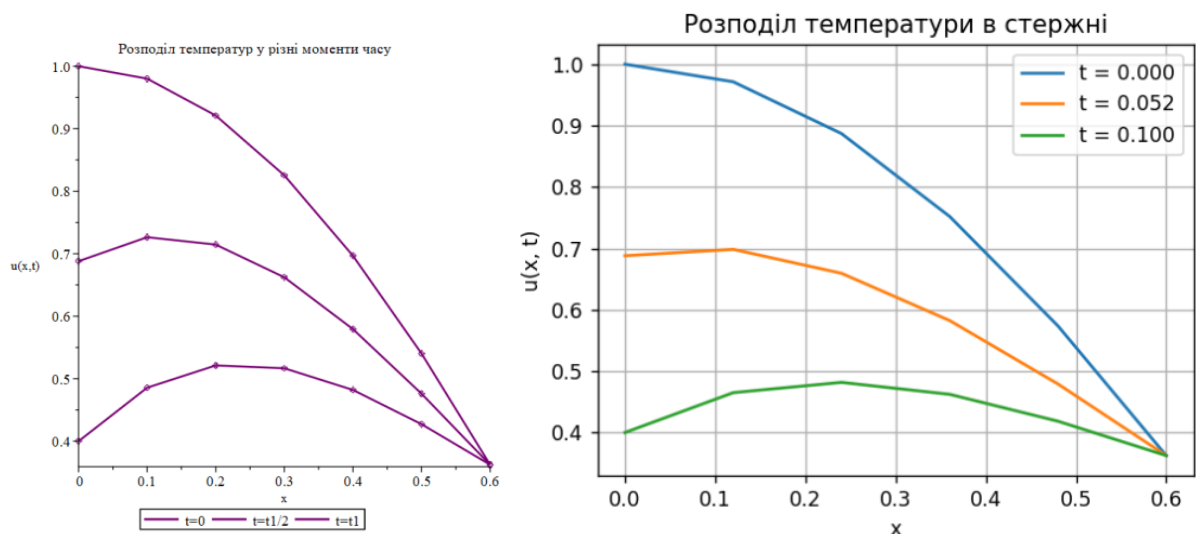


Рис. 2. Візуалізація розподілу температур в різні моменти часу, отримана в Maple та Python.

Задача Діріхле для рівняння Лапласа. Розглянемо рівняння еліптичного типу, до яких приводять дослідження стаціонарних процесів, коли шукана функція не залежить від часу. Прикладом такого рівняння є рівняння Лапласа. Розглянувши його з граничними умовами по координатах x, y , отримаємо першу крайову задачу або задачу Діріхле:

$$\Delta U = 0, \quad U(x, 0) = f(x), \quad U(x, b) = g(x), \quad U(0, y) = p(y), \quad U(a, y) = q(y). \quad (15)$$

Розв'язок будемо шукати в області $D: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

Використовуючи (1) замінимо задачу (15) її скінчено-різницевою аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} = 0, \quad (16)$$

або

$$2(h^2 + k^2)U_{i,j} = k^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + h^2(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), i = \overline{1, n-1}; j = \overline{1, 2, \dots} \quad (17)$$

Знаходимо значення $U_{i,j}$, які відповідають граничним вузлам завдяки граничним умовам (15).

Для всіх внутрішніх вузлів сітки записуємо рівняння (17) та отримаємо СЛАР з досить великою кількістю рівнянь та невідомих. Отриману систему алгебраїчних рівнянь можна розв'язати, використовуючи прямі або ітераційні методи [8].

Приклад реалізації методу сіток для задачі (15) в Maple.

```
restart;
with(plots):
mySolver := proc ( )
    local h, N, u, x, y, i, j, uold, d, diff, iter, maxIter, eps, xx, yy, data;

    h := 0.5;
    N := round(2/h) + 1;
    u := Array(1..N, 1..N);

    x := proc (i) options operator, arrow; (i-1)*h end proc;
    y := proc (j) options operator, arrow; (j-1)*h end proc;

    for i to N do
        u[i, 1] := -1 + x(i)^2; # f(x)
        u[i, N] := 1 - x(i); # g(x)
    end do;

    for j to N do
        u[1, j] := -1 + y(j); # p(y)
        u[N, j] := 3 - y(j)^2; # q(y)
    end do;

    for i from 2 to N-1 do
        for j from 2 to N-1 do
            u[i, j] := 0
        end do
    end do;

    eps := 0.0001;
    maxIter := 1000;
    iter := 0;

    do
        diff := 0;
        for i from 2 to N-1 do
            for j from 2 to N-1 do
                uold := u[i, j];
                u[i, j] := 0.25 * (u[i+1, j] + u[i-1, j] + u[i, j+1] + u[i, j-1]);
                d := abs(u[i, j] - uold);
                if diff < d then
                    diff := d
                end if
            end do
        end do;
        iter := iter + 1;
        if diff < eps or iter >= maxIter then
            break
        end if
    end do;

    printf("Ітерацій виконано: %d\n", iter);
    printf("Таблиця значень u(x,y):\n");

    for j from N by -1 to 1 do
        for i to N do
            printf("%8.4f", u[i, j])
        end do;
        printf("\n")
    end do;

    xx := [seq(x(i), i = 1..N)];
    yy := [seq(y(j), j = 1..N)];
    data := [seq([seq([xx[i], yy[j], u[i, j]], j = 1..N)], i = 1..N)];

    return surfdata(data, shading = zhue, style = surface, axes = boxed, labels = ["x", "y", "u(x,y)"]);
end proc;

mySolver( );
```

Таблиця значень та візуалізація отриманого розв'язку:

```
Ітерацій виконано: 14
Таблиця значень u(x,y):
1.0000  0.5000  0.0000  -0.5000  -1.0000
0.5000  0.3750  0.3214  0.4107  0.7500
0.0000  0.1785  0.4999  1.0714  2.0000
-0.5000 -0.1608  0.4285  1.3750  2.7500
-1.0000 -0.7500  0.0000  1.2500  3.0000
```

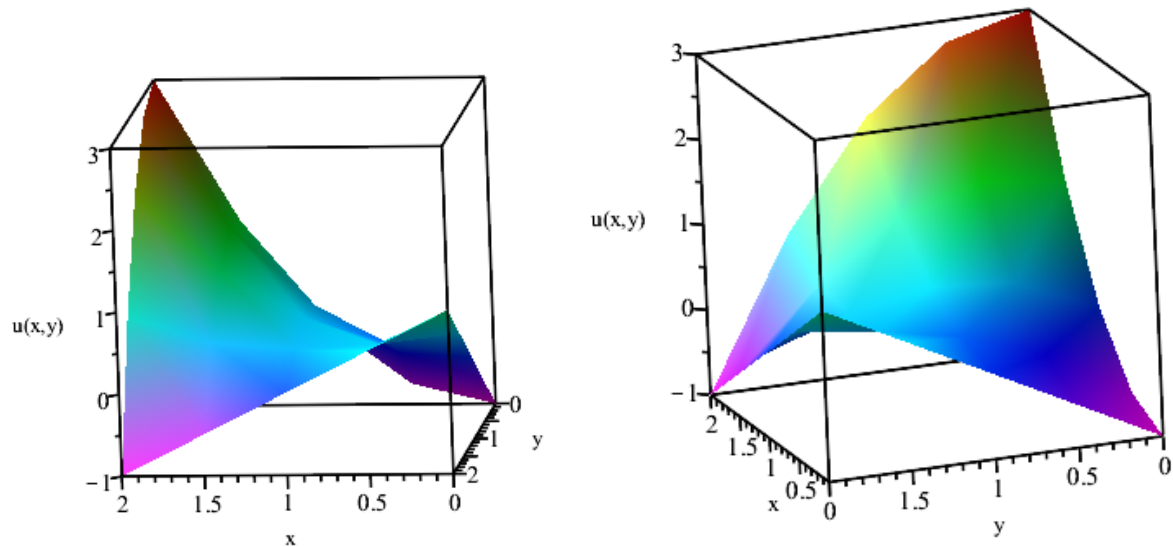


Рис. 3. Візуалізація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в Maple.

Завдяки чітким алгоритмам чисельних методів розв'язання задач математичної фізики студентам пропонується написати програми з візуалізацією отриманих розв'язків будь-якою мовою програмування, наприклад на C++, Python або Java, та провести аналіз програмної реалізації з розв'язанням в середовищі Maple.

Використання програмних пакетів та програмної реалізації до вивчених методів значно скорочує час, який необхідно витратити для отримання розв'язку складної задачі. Є можливість отримати результат за досить короткий час замість багатьох годин ручної роботи, що дозволяє більше зосередитися на аналізі результатів та прийнятті рішень. Крім того, програмні пакети добре протестовані, тому забезпечують більш точні та надійні результати. За допомогою програмної реалізації є можливість отримати не тільки розв'язок поставленої задачі, а ще й візуалізацію результатів, що значно полегшує розуміння складних процесів.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. В статті були розглянуті три задачі математичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними другого порядку різних типів. До кожної задачі надано короткий алгоритм відшукування її розв'язку та показано як вони реалізуються в системі комп'ютерної математики Maple з візуалізацією отриманих результатів. Надалі планується продовжити серію статей, які будуть присвячені вивченню інших розділів курсу «Чисельні методи» з використанням Maple.

Список бібліографічного опису

1. Задачин В.М., Конюшенко І.Г. (2014) Чисельні методи: навчальний посібник. Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 180 с.
2. Нікітенко О.М. (2014) Maple: Розв'язання інженерних та наукових задач: Навч. посібник. Харків: ХНУРЕ, 289 с.
3. Михалевич В.М. (2004) Навчально-контролюючий Maple – комплекс з вищої математики. Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія, № 1, С. 74–78.
4. Воробйова А.І., Курікша О.В. (2009) Симетрійний аналіз диференціальних рівнянь у частинних похідних за допомогою математичного пакету Maple. Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили. Сер.: Комп'ютерні технології, 106, вип. 93, С. 75–79.
5. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. (2020) Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник. Львів: Видавництво «Новий світ – 2000», 470 с.
6. Волонтир Л.О., Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. (2020) Чисельні методи: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 322 с.
7. Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В. (2010) Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь. Навчальний посібник для студентів напрямів підготовки “математика” та “прикладна математика”. – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 148 с.
8. Брагінець О.В., Воробйова А.І. (2022) Використання математичного пакету Maple до розв'язання СЛАР прямими чисельними методами // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво, № 47. С.55–63

References

1. Zadachyn V.M., Konyushenko I.H. (2014). Numerical methods: a training manual. Kharkiv: Vyd. KHNUE im. S. Kuznetsya, 180 p.
2. Nikitenko O.M. (2014). Maple: Solving engineering and scientific problems: a training manual. Kharkiv: NURE, 289 p.
3. Mykhalevych, V. M. (2004). Educational and control Maple – a complex of higher mathematics. Information technology and computer engineering, No 1, pp. 74-78.
4. Vorobyova A.I., Kuriksha O.V. (2009) Symmetric analysis of partial differential equations using the Maple mathematical package. Scientific works of the Petro Mohyla Black Sea State University. Ser. : Computer Technologies, 106, vol. 93, pp. 75-79.
5. Andrunyk V.A., Vysotska V.A., Pasichnyk V.V., Chyrun L.B., Chyrun L.V. (2020). Numerical Methods in Computer Science: Textbook - Lviv: Vydavnytstvo «Novyy svit – 2000», 470 p.
6. Volontyr L.O., Zelinska O.V., Potapova N.A., Chikov I.A. (2020). Numerical methods: Textbook. - Vinnytsya: VNAU, 322 p.
7. Goy T.P., Kopach M.I., Fedak I.V. (2010) Approximate methods for solving differential equations. A textbook for students of the “mathematics” and “applied mathematics” training areas. – Ivano-Frankivsk: Publishing and design department of the Center for Information Technologies of Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 148 p.
8. Brahinets O., & Vorobyova A. (2022). Using the mathematical program Maple to solve systems of linear algebraic equations by direct numerical methods. Computer-integrated technologies: education, science, production, (47), 55-63. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-47-08>