

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2024-56-27>

УДК: 004.02

Марченко Олексій Олександрович, асистент

<https://orcid.org/0000-0002-5080-4811>

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

## ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК ПОШУКУ ПО ДЕРЕВУ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ЗА ДОПОМОГОЮ КОНТРОЛЮ ФОРМИ ДЕРЕВА ПОШУКУ

**Марченко О.О. Подальший розвиток пошуку по дереву методом Монте-Карло за допомогою контролю форми дерева пошуку.** Представлення інформації певної задачі у вигляді дерева і пошук найкращих рішень в рамках цієї задачі з побудовою дерева рішень методом Монте-Карло, який отримав назву MCTS (Monte Carlo Tree Search) є одним з найкращих підходів для виконання пошуку для розв'язку задач, в яких знаходження найкращих рішень є дуже складним і часовитратним процесом. Стаття присвячена запропонованому раніше варіанту подальшого розвитку пошуку по дереву методом MCTS за допомогою контролю форми дерева пошуку. Цей варіант був названий MCTS-TSC (Monte-Carlo Tree Search with Tree Shape Control) і базується на критеріях виду DW (Depth-Width) з метою контролювання форми дерева пошуку під час його побудови. В статті пропонується два нових критерії виду DW: DWC і WDC, принцип впливу яких на форму дерева пошуку, що будується, відрізняється від раніше запропонованих критеріїв. Апробація використання нових запропонованих критеріїв контролю форми дерева DWC і WDC показала підвищення ефективності пошуку кращих подальших ходів гравця, який використовував варіант пошуку MCTS-TSC з контролем форми дерева, порівняно до гравця, що використовував стандартний варіант пошуку MCTS-UCT. Гравець MCTS-TSC при використанні критерію DWC виграв у гравця MCTS-UCT на 55% партій більше, а при використанні критерію WDC – на 42% більше, що суттєво краще, ніж у запропонованих раніше критеріїв. У якості висновків зазначено, що оскільки формули обчислення критеріїв виду DW є нескладними, то їх реалізація для контролю форми дерева не буде суттєво впливати на час пошуку варіантом MCTS-TSC. Крім того, відзначено, що запропоновані нові критерії виду DW можуть бути також використані для більш ефективного розпаралелення процесу пошуку MCTS і більш ефективного використання наявних апаратних ресурсів. Запропоновані також можливі напрямки подальшого розвитку пошуку методом Монте-Карло з контролем форми дерева пошуку MCTS-TSC.

**Ключові слова:** пошук в дереві методом Монте-Карло, MCTS, MCTS-UCT, контроль форми дерева пошуку, критерії виду «глибина-ширина», MCTS-TSC.

**Marchenko O. Further development of the Monte Carlo tree search method by controlling the search tree shape.** Representing the information of a certain problem in the form of a tree and searching for the best solutions within this problem with the construction of a decision tree by the Monte Carlo method, which was named MCTS (Monte Carlo Tree Search), is one of the best approaches for performing a search for solving problems in which finding the best solutions is a very difficult and time-consuming process. The article is devoted to the previously proposed variant of further development of the tree search by the MCTS method by means of controlling the shape of the search tree. This variant was named MCTS-TSC (Monte-Carlo Tree Search with Tree Shape Control) and is based on the DW (Depth-Width) kind criteria in order to control the shape of the search tree during its construction. The article proposes two new DW kind criteria: DWC and WDC, the principle of which affects the shape of the search tree in a different way from the previously proposed criteria. Approbation of the use of the new proposed tree shape control criteria DWC and WDC showed an increase in the efficiency of searching for the best subsequent moves of the player who used the MCTS-TSC search variant with tree shape control compared to the player who used the standard MCTS-UCT search variant. The MCTS-TSC player won 55% more games than the MCTS-UCT player when using the DWC criterion, and 42% more when using the WDC criterion, which is significantly better than the previously proposed criteria showed. As conclusions, it is stated that since the formulas for calculating the criteria of the DW kind are simple, their implementation for controlling the shape of the tree will not significantly affect the search time of the MCTS-TSC variant. In addition, it was noted that the proposed new DW kind criteria can also be used for more efficient parallelization of the MCTS search process and more efficient use of available hardware resources. Possible directions for the further development of the MCTS-TSC search using the Monte Carlo method with the control of the of the search tree shape are also proposed.

**Keywords:** Monte-Carlo tree search method, MCTS, MCTS-UCT, search tree shape control, criteria of the "Depth-Width" kind, MCTS-TSC.

### Постановка наукової проблеми

Представлення інформації певної задачі у вигляді дерева і пошук найкращих рішень в рамках цієї задачі з побудовою дерева рішень методом Монте-Карло (Monte Carlo Tree Search – MCTS) [1] зарекомендувало себе як один з найкращих підходів для розв'язку задач із галузі штучного інтелекту. Такі задачі є дуже вимогливими до швидкості знаходження якомога кращих поточних рішень, що виникають при розв'язку цих задач, оскільки інформація, яку потрібно проаналізувати, має критично великий обсяг. За час після того, як метод MCTS був запропонований вперше, було розроблено багато варіантів подальшого розвитку цього методу у різних напрямках: модифікації його основної формули UCSB1 з орієнтацією на певні класи задач, пропонування нових варіантів виконання основних чотирьох етапів цього пошуку, зберігання додаткової інформації в процесі

пошуку для підвищення його ефективності, комбінування MCTS з методами машинного навчання, розпаралелення процесу роботи основних етапів роботи MCTS тощо. Але теоретична потужність методу MCTS, а також все зростаючі складність задач штучного інтелекту та обсяги інформації цих задач все ще залишають великий простір для подальшого розвитку методу MCTS у всіх зазначених напрямках. Одному з таких напрямків подальшого розвитку методу MCTS, а саме підвищенню ефективності цього методу за допомогою контролю форми дерева пошуку, присвячена ця стаття.

#### **Аналіз досліджень**

Пошуку по дереву методом MCTS було присвячено вже багато публікацій, виконаних як різними дослідниками, так і автором разом зі співавторами. Одними з кращих публікацій оглядового характеру щодо підходів та способів вдосконалення MCTS є роботи [1-8]. Дослідження взаємозв'язку форми дерева пошуку MCTS і ефективності знаходження цим пошуком найкращих подальших дій, крім авторських робіт, виконувалися також в [6-8]. Зокрема, в дослідженні [6] були використані такі параметри дерева пошуку як глибина і поточний степінь розгалуження вершин дерева, а в дослідженні [7] було відзначено, що (в перекладі з англійської) «... в залежності від кількості вершин в деревах, їх глибина і ширина можуть варіюватися, дозволяючи нам відповісти на питання, чи надає MCTS перевагу якимсь одним перед іншими. ... ми з'ясували, що від самої гри залежить, чи надає MCTS перевагу глибоким деревам, чи великому степеню розгалуження на вершинах (тобто широким деревам), чи певному балансу між ними. Виявилось, що невеликі нюанси в правилах гри і системі оцінювання результату можуть змінювати форму дерев, яким надає перевагу MCTS».

Автор разом зі співавторами вже виконували раніше дослідження цього напрямку, зокрема у [9] був запропонований варіант подальшого розвитку методу MCTS, що базується на цій ідеї і який був названий пошуком по дереву методом Монте-Карло з контролем форми дерева (Monte-Carlo Tree Search with Tree Shape Control – MCTS-TSC), а також були запропоновані деякі критерії виду «глибина-ширина» для контролю форми дерева пошуку під час його побудови. Але наразі цей напрям досліджень отримав новий розвиток, який і описується в пропонованій статті.

**Метою даної роботи** є розробка нового варіанту подальшого розвитку пошуку по дереву методом з контролем форми дерева пошуку MCTS-TSC на основі нових критеріїв контролю форми дерева пошуку виду «глибина-ширина», принцип дії яких відрізняється від раніше запропонованих критеріїв.

#### **Подальший розвиток пошуку по дереву методом Монте-Карло за допомогою контролю форми дерева пошуку (MCTS-TSC)**

Головна ідея подальшого розвитку методу MCTS, що пропонується, а також критеріїв виду «глибина-ширина», була викладена раніше в [9]. Розглянемо коротко цю ідею. Якщо ми знаємо, яка типова форма дерева пошуку MCTS відповідає найбільш ефективному пошуку цим методом для конкретної гри чи іншої прикладної задачі, і ця форма є, наприклад, ширшою, ніж форма дерева, яке побудоване процесом пошуку MCTS в певний момент, то ми можемо спробувати перелаштувати параметри формули UCS1 MCTS таким чином, щоб подальшу побудову дерева спрямувати в сторону отримання більш глибокої форми дерева, і навпаки. В результаті форма дерева MCTS надалі стане більш характерною для цієї гри (задачі) і ефективність пошуку MCTS може покращитися. Оскільки ця ідея ґрунтується на контролі форми дерева під час процесу пошуку, то саме тому такий варіант подальшого розвитку MCTS був названий MCTS-TSC (MCTS with Tree Shape Control).

Форму дерева пошуку MCTS визначимо у вигляді прямокутника зі сторонами Depth та Width (рис. 1), у який це дерево може бути вписаним: Depth – глибина дерева (максимальна кількість рівнів дерева – позначено синім кольором), Width – ширина дерева (максимальна сумарна кількість вершин на всіх рівнях по горизонталі – позначено червоним кольором).

Для реалізації подальшого розвитку методу MCTS за допомогою контролю форми дерева пошуку, ідея якого описана вище, пропонується використовувати спеціальні критерії виду «глибина-ширина» DW (Depth-Width), які є формулами для оцінювання поточної форми дерева пошуку.

Критерії виду DW на кожній ітерації етапу вибору MCTS обчислюються для піддерев всіх вершин, по яких відбувається спуск на етапі вибору, від кореня до вершини, на якій зупиниться процес етапу вибору. Таке обчислення виконується на основі двох властивостей форми піддерев цих вершин – поточної глибини піддерева вершини ND (NodeDepth) та поточної ширини піддерева вершини NW (NodeWidth).

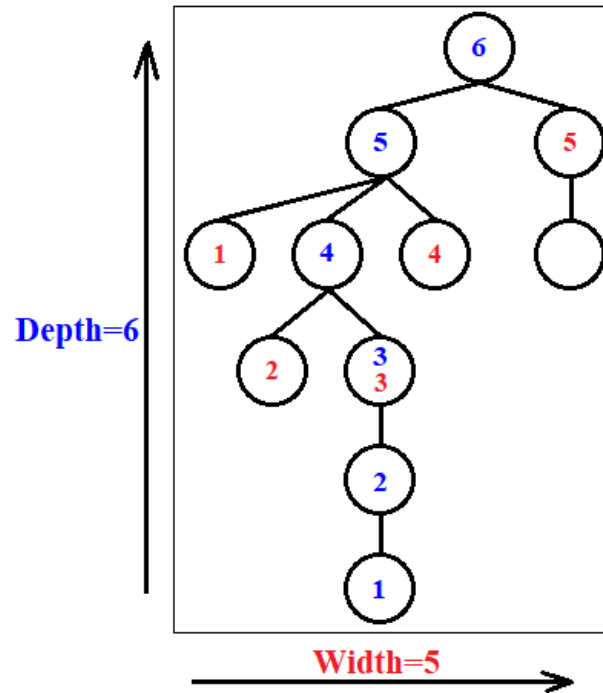


Рис. 1. Форма дерева пошуку MCTS

Процес обчислення значень властивостей ND та NW для вершин дерева під час його побудови описано в [9]. В цій же роботі для контролю форми та керування формою піддерев вершин (спрямування подальшої побудови дерева у потрібному напрямку) на основі обчислених властивостей (ND та NW) були запропоновані деякі критерії виду DW виду «глибина-ширина», використання яких дало позитивний ефект і підвищило ефективність пошуку MCTS-TSC.

В більш пізніх дослідженнях виникла ідея подальшого розвитку контролю форми дерева пошуку MCTS на основі нових критеріїв виду DW з іншим принципом впливу на форму дерева, що будується. Ця стаття присвячена розгляду саме цього подальшого розвитку методу MCTS-TSC.

Відповідно до описаної вище ідеї контролю та керування формою піддерев пропонується підхід, який, на відміну від попередніх критеріїв, полягає у додаванні обчисленого значення критерію виду DW безпосередньо до параметра  $C_{UCB1}$  у формулі (1):  $UCB1\_TSC$  ( $UCB1$  with Tree Shape Control), а не до усього значення  $UCB1\_TSC$ , як було у попередніх критеріях [9]. Тобто, нові критерії використовують загальну властивість параметра впливати на форму дерева, що будується [8] (відзначено в аналізі статті), і скеровують вплив цього параметра або в сторону поглиблення дерева, або в сторону розширення дерева.

$$UCB1\_TSC = \frac{NodeWins}{NodePlayouts} + 2 * (C_{UCB1} + DW) * \sqrt{2 * \frac{\ln(ParentPlayouts)}{NodePlayouts}} \quad (1)$$

Пропонується два нових простих критерії виду DW, які обчислюються за формулами (2) та (3) і значення яких додаються до параметра  $C_{UCB1}$  формули (1).

$$DWC = C_R * \left( \frac{ND}{NW} - C_{DW} \right) \quad (2)$$

$$WDC = -C_R * \left( \frac{NW}{ND} - C_{WD} \right) = C_R * \left( C_{WD} - \frac{NW}{ND} \right) \quad (3)$$

де

$DWC$  (Depth/Width Criterion) – критерій «глибина/ширина»;

$C_{DW}$  – параметр (коефіцієнт) виду «глибина/ширина» бажаної форми дерева;

$WDC$  (Width/Depth Criterion) – критерій «ширина/глибина»;

$C_{WD}$  – параметр (коефіцієнт) виду «ширина/глибина» бажаної форми дерева;

$C_R$  – параметр (коефіцієнт) регуляції (зменшення/збільшення) впливу критерію  $DWC$  чи  $WDC$ .

Параметр  $C_{DW}$  визначає пропорцію «глибина/ширина» бажаної форми дерева, до якої потрібно скеровувати побудову дерева під час пошуку і обчислюється за формулою (4):

$$C_{DW} = \frac{DFD}{DFW} \quad (4)$$

А параметр  $C_{WD}$ , відповідно, визначає пропорцію «ширина/глибина» бажаної форми дерева, до якої потрібно скерувувати побудову дерева під час пошуку і обчислюється за формулою (5):

$$C_{WD} = \frac{DFW}{DFD} \quad (5)$$

де

DFD (Desired Form Depth) – глибина бажаної форми дерева;

DFW (Desired Form Width) – ширина бажаної форми дерева.

Критерії DWC та WDC є подібними один до одного. Різниця між ними полягає в тому, яка із властивостей, глибина чи ширина, знаходиться у чисельнику, а яка – у знаменнику. Відповідно, значення критерію DWC залежить від глибини дерева прямо пропорційно, а від ширини – оберненопропорційно, а значення критерію WDC – навпаки. В цих критеріях також навпаки розташовані доданки. У критерію DWC задана параметром  $C_{DW}$  бажана пропорція форми дерева віднімається від пропорції значень глибини та ширини піддерева поточної вершини, а у критерію WDC – навпаки, пропорція значень поточної вершини віднімається від заданої параметром  $C_{WD}$  бажаної пропорції форми дерева. Це забезпечує однаковий знак значень критеріїв DWC та WDC для однакових форм піддерев поточної вершини дерева відносно заданої бажаної форми дерева, а різниця між значеннями цих критеріїв залишиться тільки у прямій чи оберненій залежності від глибини чи ширини дерева.

При контролі форми дерева за допомогою формули UCB1\_TSC (формула (1)) важливо, щоб знак критеріїв виду DW при відступах поточної пропорції глибини та ширини від заданої був саме таким, а не навпаки. Це визначається зазначеною вище роллю параметра  $C_{UCB1}$ : якщо параметру  $C_{UCB1}$  встановлюють менші значення, то дерево буде будуватися більш глибоким і вузьким, а якщо цьому параметру встановлювати більші значення, то дерево буде будуватися ширшим. Тому, якщо форма поточного дерева ширша, ніж задана пропорція форми дерева, то значення критерію DW повинно бути від'ємним, щоб скерувати побудову дерева до більш глибокої форми, ніж це визначається параметром  $C_{UCB1}$ , а якщо форма поточного дерева задовга, то навпаки значення DW повинно бути додатним.

На рис. 2 показані дві можливі ситуації поточної форми дерева пошуку (червоний прямокутник) відносно заданої форми дерева (чорний прямокутник), до якої поточну форму бажано скерувати, та відповідні знаки значень критеріїв DWC та WDC, які ці критерії будуть мати у таких ситуаціях.



Рис. 2. Ситуації поточної форми дерева пошуку відносно заданої форми дерева

Ця властивість критеріїв DW показана також у таблиці 1 на прикладі критерію DWC при заданій пропорції форми дерева  $C_{DW} = ND/NW = 2$ . Зауважимо, що ця пропорція взята винятково для демонстрації принципу роботи критеріїв, а для конкретних реальних прикладних задач та ігор може сильно відрізнятися як в одну сторону, так і в другу.

Таблиця 1. Значення критерію DWC при заданій пропорції форми дерева  $C_{Dw}=2$

DWC $C_{Dw}=2$		NW					
		1	2	3	4	5	6
ND	1	-1,0000	-1,5000	-1,6667	-1,7500	-1,8000	-1,8333
	2	<b>0,0000</b>	-1,0000	-1,3333	-1,5000	-1,6000	-1,6667
	3	1,0000	-0,5000	-1,0000	-1,2500	-1,4000	-1,5000
	4	2,0000	<b>0,0000</b>	-0,6667	-1,0000	-1,2000	-1,3333
	5	3,0000	0,5000	-0,3333	-0,7500	-1,0000	-1,1667
	6	4,0000	1,0000	<b>0,0000</b>	-0,5000	-0,8000	-1,0000
	7	5,0000	1,5000	0,3333	-0,2500	-0,6000	-0,8333
	8	6,0000	2,0000	0,6667	<b>0,0000</b>	-0,4000	-0,6667
	9	7,0000	2,5000	1,0000	0,2500	-0,2000	-0,5000
	10	8,0000	3,0000	1,3333	0,5000	<b>0,0000</b>	-0,3333
	11	9,0000	3,5000	1,6667	0,7500	0,2000	-0,1667
	12	10,0000	4,0000	2,0000	1,0000	0,4000	<b>0,0000</b>

В таблиці червоним кольором виділено, що при збігу пропорцій поточної форми дерева із пропорцією заданої форми (2/1, 4/2, 6/3 і т.д.) значення критерію DWC дорівнює нулю, тобто корекція параметра  $C_{UCB1}$  буде відсутня. Також неважко помітити, що при  $ND > NW$ , значення критерію DWC є додатними, тобто параметр  $C_{UCB1}$  буде скоригований в сторону розширення дерева, а при  $ND < NW$ , значення критерію DWC є від'ємними, тобто параметр  $C_{UCB1}$  буде скоригований в сторону поглиблення дерева. Аналогічно буде і для критерію WDC.

#### Апробація

Для апробації запропонованих нових критеріїв була виконана множина партій гри Connect Four [10] між гравцями, один з яких грав, використовуючи варіант пошуку по дереву з контролем форми дерева MCTS-TSC, а другий гравець грав, використовуючи стандартний варіант MCTS-UCT. Було виконано сумарно по 120 партій для критерію DWC та критерію WDC при попередньо визначеному найкращому для гри Connect Four значенні параметра  $C_{UCB1}=0.55$ , різних значеннях параметрів  $C_{Dw}$ ,  $C_{Wd}$ ,  $C_R$  критеріїв DWC і WDC відповідно, та різному обчислювальному бюджеті на знаходження наступного ходу. Було проведено по 20 партій при кожному з шести обчислювальних бюджетів (кількості ітерацій пошуку): 50000, 100000, 150000, 200000, 250000, 300000. В десяти партіях з двадцяти першим ходив гравець MCTS-TSC, а ще в десяти партіях першим ходив гравець MCTS-UCT. Сумарні результати проведення цих партій, що наведені на рис. 3, підтверджують ефективність застосування нових критеріїв DWC та WDC.

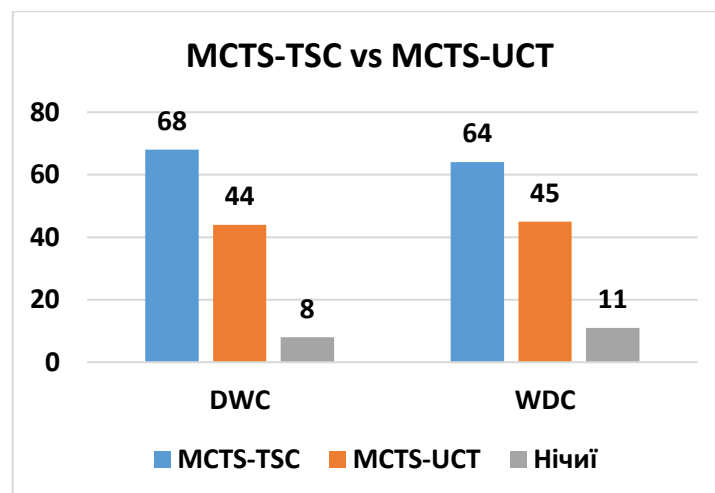


Рис. 3. Результати експериментальної перевірки ефективності критеріїв DWC та WDC

Гравець MCTS-TSC при використанні критерію DWC виграв у гравця MCTS-UCT на 55% партій більше, а при використанні критерію WDC – на 42% більше, що суттєво краще, ніж у запропонованих раніше критеріїв.

Автором планується, що розширеній експериментальній перевірці ефективності цих критеріїв та порівняльній характеристиці отриманих результатів буде присвячена окрема стаття.

### Висновки

В статті запропоновані нові критерії виду DW («глибина-ширина») для контролю форми дерева пошуку методу MCTS. Ці критерії дозволяють контролювати форму дерева гри під час процесу пошуку, тобто оцінювати поточну форму і спрямовувати подальшу побудову дерева у напрямку до бажаної для певної задачі форми.

Якщо завчасно відомо, яка форма дерева пошуку (вузька, «скелетоподібна», широка, неглибока, глибока, дуже глибока тощо) є типовою для ефективного пошуку кращих ходів для конкретної гри чи прикладної задачі, то, враховуючи таку інформацію, з'являються нові можливості для динамічного контролю форми дерева пошуку, що дозволяє скерувати подальший процес побудови дерева в потрібному напрямку і, в результаті, підвищити ефективність пошуку кращих наступних дій (ходів) методом MCTS.

Оскільки формули обчислення критеріїв виду DW є нескладними, то їх реалізація для контролю форми дерева не буде суттєво впливати на час пошуку варіантом MCTS-TSC.

Запропоновані критерії виду DW можуть бути також використані для більш ефективного розпаралелення процесу пошуку MCTS і більш ефективного використання наявних апаратних ресурсів.

### Напрямки подальших досліджень

Окрім запропонованих в цій статті нових критеріїв виду DW, можливі й інші підходи до подальшого розвитку пошуку MCTS за допомогою контролю форми дерева пошуку. Наприклад, можна запропонувати підхід, який полягає у використанні значень критеріїв DW на етапі вибору для прийняття рішення, чи зупинити вибір вершини і починати виконувати етапи розширення та моделювання, чи продовжувати процес етапу вибору вниз по дереву. Ще одним з варіантів застосування контролю форми дерева TSC, що базується на критеріях виду DW, може бути також його сумісне використання з іншими варіантами подальшого розвитку методу пошуку MCTS.

Крім того, параметри  $C_{DW}$ ,  $C_{WD}$  та  $C_R$ , що контролюють вплив форми дерева, можуть бути встановлені як однакові константи для всіх вершин, або як різні константи для вершин, що знаходяться на різних рівнях глибини (прогресивні значення), або як змінні, що залежать від деяких евристик та знань предметної області, або натреновані за допомогою деякого способу машинного навчання. Іншим варіантом керування параметрами  $C_{DW}$ ,  $C_{WD}$  та  $C_R$  може бути встановлення їм більших значень для вершин, що мають багато ще невідвіданих та/або мало відвіданих вершин-нащадків, для того, щоб отримати більш широку форму дерева пошуку з кращим виконанням дослідження.

Варто також зазначити, що використання контролю форми дерева MCTS-TSC для налаштування формули UCB1 не виключає одночасного використання інших способів і, швидше за все, найкраще застосування MCTS-TSC буде якраз сумісно з іншими налаштовуваними, відсікаючими та навчаючими способами, включно зі способами, що використовують деякі критерії, орієнтовані на форму дерева.

Всі ці варіанти подальшого розвитку методу MCTS можуть бути предметом подальших досліджень.

### Список бібліографічного опису

1. Cameron Browne, Edward Powley, Daniel Whitehouse, Simon M. Lucas, Peter I. Cowling, et al., "A Survey of Monte Carlo Tree Search Methods", *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, vol. 4, no. 1, pp. 1–43, March 2012. doi: 10.1109/TCIAIG.2012.2186810.
2. Marco Kemmerling, Daniel Lütticke, and Robert H. Schmitt, "Beyond games: a systematic review of neural Monte Carlo tree search Applications", *Applied Intelligence*, vol.54, 2024, pp. 1020–1046. doi: 10.1007/s10489-023-05240-w.
3. Jorik Jooker, Pieter Leyman, Tony Wauters, Patrick De Causmaecker, "Exploring search space trees using an adapted version of Monte Carlo tree search for combinatorial optimization problems", *Computers & Operations Research*, ISSN: 0305-0548, vol. 150, pp. 1–46. doi: 10.1016/j.cor.2022.106070.
4. T. Ou, Y. Lu, X. Wu and J. Cao, "Monte Carlo Tree Search: A Survey of Theories and Applications," *2022 3rd International Conference on Big Data, Artificial Intelligence and Internet of Things Engineering (ICBAIE)*, Xi'an, China,

2022, pp. 388-396, doi: 10.1109/ICBAIE56435.2022.9985899.

5. G. M. J.-B. Chaslot, M. H. M. Winands, and H.J. van den Herik, "Parallel Monte-Carlo Tree Search", *Computers and Games. CG 2008. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5131, pp.60–71, 2008, Springer, Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-540-87608-3\_6.
6. Gareth M. J. Williams, "Determining Game Quality Through UCT Tree Shape Analysis", *MSc. Thesis. Imperial College London*, 2010. [Online]. Available: <https://www.doc.ic.ac.uk/teaching/distinguished-projects/2010/g.williams.pdf>. Accessed on: Sep. 05, 2024.
7. Hilmar Finnsson and Yngvi Björnsson, "Game-Tree Properties and MCTS Performance", *GIGA 2011: Proceedings of the 2nd International General Game Playing Workshop*, Jan. 2011, pp. 23–30. Available: <http://surl.li/hlmyrs>. Accessed on: Sep. 05, 2024
8. Joel Veness, Kee Siong Ng, Marcus Hutter, William Uther, and David Silver, "A Monte-Carlo AIXI Approximation", *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 40, no. 1, pp. 95–142, January 2011. Available: <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/2016945.2016949>. Accessed on: Sep. 05, 2024.
9. Oleksandr I. Marchenko and Oleksii O. Marchenko, "Monte-Carlo tree search with tree shape control", *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kyiv, Ukraine, 2017, pp. 812-817, doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100358.
10. Connect Four, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Available: <http://surl.li/zhdnfm>. Accessed on: Sep. 05, 2024.

### References

1. Cameron Browne, Edward Powley, Daniel Whitehouse, Simon M. Lucas, Peter I. Cowling, et al., "A Survey of Monte Carlo Tree Search Methods", *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, vol. 4, no. 1, pp. 1–43, March 2012. doi: 10.1109/TCIAIG.2012.2186810.
2. Marco Kemmerling, Daniel Lütticke, and Robert H. Schmitt, "Beyond games: a systematic review of neural Monte Carlo tree search Applications", *Applied Intelligence*, vol.54, 2024, pp. 1020–1046. doi: 10.1007/s10489-023-05240-w.
3. Jorik Jookan, Pieter Leyman, Tony Wauters, Patrick De Causmaecker, "Exploring search space trees using an adapted version of Monte Carlo tree search for combinatorial optimization problems", *Computers & Operations Research*, ISSN: 0305-0548, vol. 150, pp. 1–46. doi: 10.1016/j.cor.2022.106070.
4. T. Ou, Y. Lu, X. Wu and J. Cao, "Monte Carlo Tree Search: A Survey of Theories and Applications," *2022 3rd International Conference on Big Data, Artificial Intelligence and Internet of Things Engineering (ICBAIE)*, Xi'an, China, 2022, pp. 388-396, doi: 10.1109/ICBAIE56435.2022.9985899.
5. G. M. J.-B. Chaslot, M. H. M. Winands, and H.J. van den Herik, "Parallel Monte-Carlo Tree Search", *Computers and Games. CG 2008. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5131, pp.60–71, 2008, Springer, Berlin, Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-540-87608-3\_6.
6. Gareth M. J. Williams, "Determining Game Quality Through UCT Tree Shape Analysis", *MSc. Thesis. Imperial College London*, 2010. [Online]. Available: <https://www.doc.ic.ac.uk/teaching/distinguished-projects/2010/g.williams.pdf>. Accessed on: Sep. 05, 2024.
7. Hilmar Finnsson and Yngvi Björnsson, "Game-Tree Properties and MCTS Performance", *GIGA 2011: Proceedings of the 2nd International General Game Playing Workshop*, Jan. 2011, pp. 23–30. Available: <http://surl.li/hlmyrs>. Accessed on: Sep. 05, 2024
8. Joel Veness, Kee Siong Ng, Marcus Hutter, William Uther, and David Silver, "A Monte-Carlo AIXI Approximation", *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 40, no. 1, pp. 95–142, January 2011. Available: <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/2016945.2016949>. Accessed on: Aug 14, 2024.
9. Oleksandr I. Marchenko and Oleksii O. Marchenko, "Monte-Carlo tree search with tree shape control", *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kyiv, Ukraine, 2017, pp. 812-817, doi: 10.1109/UKRCON.2017.8100358.
10. Connect Four, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Available: <http://surl.li/zhdnfm>. Accessed on: Sep. 05, 2024.