

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2024-56-18>

УДК 004.05:512.64:514.12(045)

Гусак Людмила Петрівна, канд. пед. наук, доцент

<https://orcid.org/0000-0002-0022-9644>

Раздзіховська Лариса Миколаївна, канд. пед. наук, доцент

<https://orcid.org/0000-0003-0185-8036>

Вінницький торговельно-економічний інститут Державного торговельно-економічного університету, м. Вінниця, Україна

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ПРОГРАМ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ КУРСУ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

Гусак Л.П., Раздзіховська Л.М. Використання комп'ютерних програм під час викладання курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». В статті розглядаються питання навчання здобувачів першого курсу освітнього ступеня «бакалавр» під час вивчення дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» із застосуванням комп'ютерних програм. Аналізуються можливості застосування як спеціалізованих математичних пакетів, так і найбільш офісних програм. Перераховано переваги та наведено приклади використання офісної програми MS Excel та програмних продуктів Mathcad, Mathematica, MatLAB, GeoGebra у процесі вивчення окремих тем з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Встановлено, що впровадження розглянутих комп'ютерних програм у навчальний процес дало позитивну динаміку результатів вивчення студентами курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». Студенти, звичні до використання комп'ютерних технологій, перебувають у комфортному для себе психологічному середовищі, що покращує результат навчальної діяльності. Завдяки комп'ютерним програмам освітнього призначення здійснюється візуалізація абстрактних математичних понять, що сприяє якнайшвидшому сприйняттю матеріалу, більш глибокому його розумінню, прискорює процес розв'язання задач, спрощує обчислення і підвищує інтерес до дисципліни. Крім того, використання у навчальній діяльності різних комп'ютерних пакетів дозволяє індивідуалізувати навчальну діяльність студентів, з першого курсу відчуті досвід наукової роботи під час розв'язування задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії різними способами. Безліч можливостей досягнення мети формує цілісніше бачення постановки навчальної проблеми, а також формує можливість широкого спектру самостійної діяльності студента у науковій сфері.

Ключові слова: комп'ютерні математичні пакети, інформаційні технології, MS Excel, MathCad, MatLab, GeoGebra

Husak L., Radzihovska L. The usage of computer programs during the teaching course «Linear Algebra and Analytical Geometry». The article shows the issue of teaching first-year bachelor's degree holders while studying the discipline «Linear Algebra and Analytical Geometry» with the usage of computer programs. The advantages are listed and examples of using the MS Excel office program and software products Mathcad, Mathematica, MatLAB, GeoGebra in the process of studying individual topics in linear algebra and analytical geometry are given. It was established that the introduction of the considered computer programs into the educational process gave positive dynamics to the results of the students' study of the course «Linear Algebra and Analytical Geometry». Students who are accustomed to using computer technologies are in a psychological environment that is comfortable for them, which improves the results of educational activities. Thanks to educational computer programs, visualization of abstract mathematical concepts is carried out, which contributes to the fastest possible perception of the material, deeper understanding of it, accelerates the process of solving problems, simplifies calculations and increases interest in the discipline. In addition, the use of various computer packages in educational activities allows to individualize the educational activities of students, from the first year to feel the experience of scientific work while solving linear algebra and analytical geometry problems in different ways. Many opportunities to achieve the goal form a more holistic vision of the educational problem, and also form the possibility of a wide range of independent activity of the student in the scientific field.

Key words: computer mathematical packages, information technologies, MS Excel, MathCad, MatLab, GeoGebra

Постановка наукової проблеми. В останні роки в процесі викладання різних дисциплін у закладах вищої освіти все частіше використовуються програмні продукти, як професійного, так і освітнього призначення. Особливо актуальним стало використання різних пакетів програм у ході вивчення математичних дисциплін.

Існує досить велика кількість програмних продуктів, здатних активізувати освітній процес. Наприклад, такі програми, як: Maple, Mathcad, Mathematica, MatLAB, GeoGebra, GeoNext, C.a.R. та інші. Застосування програмних засобів є особливо актуальним на заняттях з математичних дисциплін. Перераховані вище пакети програм сприяють виконанню розрахунків за короткий час, дозволяють виконувати алгебраїчне обчислення, геометричні креслення математичних об'єктів, проводити маніпуляції з готовим кресленням, змінюючи значення параметрів, мають можливості анімації і т. д.

Аналіз досліджень. Аналіз науково-методичної літератури щодо удосконалення математичної освіти дозволяє стверджувати, що питанню використання у навчальному процесі різного програмного забезпечення присвячено значну кількість науково-методичних праць. Вибір

того чи іншого програмного засобу має відповідати завданням математичної дисципліни, в якій передбачається його використання, оскільки кожен засіб має сильні та слабкі сторони.

Зокрема, автори Дашченко А.Ф., Жалдак М.І., Зюков М.Є., Лазарев Ю.Ф., Кравченко І.В., Микитенко В.І. [5], Левчук О.В. [6], Хоцкіна В.Б., Вдовиченко І.Н. [9], зазначали, що системи Mathematica, MatLAB Mathcad дозволяють здійснити широкий спектр символічних перетворень, які включають операції математичного аналізу, лінійної та векторної алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Використання інтерактивних геометричних систем, зокрема GeoGebra, у навчальному процесі є одним із актуальних напрямів дослідницької діяльності як вітчизняних так і закордонних вчених та викладачів: Гуліватої І.О.[3], Дубовика В.В. [4], Samura A. O., Darhim, Juandi D. [8], Yuliardi R. [10] та інші. У своїх дослідженнях вони відмічали, що GeoGebra має такі якісно нові дидактичні можливості як наочність, моделювання, динаміка, що дозволяють змінювати традиційні підходи до вивчення багатьох розділів математики, розвиваючи пізнавальний інтерес студентів та навички дослідницької діяльності.

Мета статті. Розглянути можливості використання комп'ютерних програм освітнього призначення у процесі вивчення лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Виклад основного матеріалу. Сучасна індустрія пропонує широкий вибір програм, які можна використовувати для математичних обчислень. З усього різноманіття програмних засобів необхідно виділити для використання на комп'ютерних практикумах з математичних навчальних дисциплін наступні групи:

- математичні пакети (MatLab, MathCAD, Maple та ін.);
- статистичні пакети (Статистика 5.0, STADIA та ін.).

Вищезазначені програми є зручним інструментарієм для вирішення різних прикладних завдань. Проте працювати з матрицями можна у спеціалізованих математичних пакетах типу Mathematica, MatLab, MathCad, а й у звичних всім офісних електронних таблицях.

Вивчення освітнього компоненту «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» студентами спеціальності «Інформаційні системи та технології» у Вінницькому торговельно-економічному інституті ДТЕУ традиційно припадає на перший семестр. У цей час колишні абітурієнти ще тільки знайомляться з навчальним закладом, правилами та особливостями розкладу. Тому цей час не є зручним для вивчення нових великих математичних пакетів.

Під час вивчення тем «Матриці, лінійні операції над ними», «Визначники та їх властивості», «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь» зручно користуватися стандартними електронними таблицями. Наведемо приклади розрахунку обернених матриць, добутку матриць, систем лінійних алгебраїчних рівнянь в офісній програмі Excel (рис. 1). Електронні таблиці набули широкого поширення, вивчаються в більшості шкіл, часто встановлюються і на планшети, і на сучасні телефони, тобто студенти мають доступ до них. Студенти не відчувають труднощів під час роботи в електронних таблицях, знаходяться в комфортному психологічному середовищі і можуть повністю зосередитися на новому матеріалі з вищої математики.

	A	B	C	D	E
1					
2		матриця A			матриця B
3	2	-1	-1		0
4	1	-2	-1		-2
5	3	-3	1		1
6					
7					
8		обернена матриця			матриця X
9	0,6	-0,4	0,1		1
10	0,4	-0,6	-0,1		1
11	-0,3	-0,3	0,3		1
12					

	A	B	C	D	E
1					
2		матриця A			матриця B
3	2	-1	-1		0
4	1	-2	-1		-2
5	3	-3	1		1
6					
7					
8		обернена матриця			матриця X
9	0,6	-0,4	0,1		1
10	0,4	-0,6	-0,1		1
11	-0,3	-0,3	0,3		1
12					

Рис. 1. Приклад розв'язання в Excel

Для виконання розрахунків у цій програмі студентам необхідно знати дві функції: обчислення оберненої матриці та множення матриць. В офісній програмі Excel для цього використовується вбудований редактор формул, що містить різні категорії функцій. При виборі конкретної категорії з'являється список функцій та опис дій, що виконуються. Для обчислення оберненої матриці в Excel є функція MINVERSE (). Для знаходження відповіді необхідно провести обчислення добутку оберненої матриці на стовпець вільних членів за допомогою вбудованої функції MMULT(). Оскільки поряд з обраною функцією з'являється опис її дії, студентам необхідно хоча б у загальних рисах уявляти собі перебіг розв'язання задачі. При роботі в електронних таблицях у студентів у будь-який момент часу є можливість змінити обрану функцію на іншу, якщо це не суперечить вихідним даним.

Середовище спеціалізованого пакету MathCad умовно розуміє оточення написаних формул. Для обчислення в даному математичному пакеті достатньо задати матриці вихідних даних та вказати формулу для розрахунку. Пакет не вимагає спеціальної підготовки для виконання простих обчислень і може бути використаний при вивченні лінійної алгебри на першому курсі. Важливою особливістю електронних таблиць та пакету MathCad є миттєвий перерахунок всіх формул та результатів обчислень за зміни вихідних даних. Так, при вивченні лінійної алгебри зручно наочно демонструвати студентам, як від зміни на невелику величину однієї цифри у вихідних даних змінюється значення визначників, розв'язання системи лінійних рівнянь, як змінює вигляд і положення графіку функції. Маючи можливість багаторазово змінювати вихідні дані, студенти починають краще розуміти взаємозв'язок різних факторів.

Розглянемо алгоритм знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці, використовуючи MathCad. Дано систему лінійних рівнянь:

```
\[
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4 \\
2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\
3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2
\end{cases}
\]
```

1. Визначаємо матрицю (A) і вектор-стовпець (B) .

```
``mathcad
A :=
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 \\
2 & -1 & -3 \\
3 & -1 & 2
\end{pmatrix}
B :=
\begin{pmatrix}
-4 \\
4 \\
2
\end{pmatrix}
```

2. Знайдемо обернену матрицю (A^{-1}) .

```
``mathcad
A^{-1} := inverse(A)
```

У сучасній інженерній діяльності широко використовуються потужні комп'ютерні пакети, спеціально призначені для математичних обчислень, такі як Mathematica і MatLab. Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь у математичному пакеті Mathematica:

```
Solve[{x^2-1=0, x^2-3x+2=0},x].
```

Відповіддю буде запис $x \rightarrow 1$.

Приклад розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь алгебри в математичному пакеті MatLab.

3. Знаходимо розв'язок (X) .

```
``mathcad
X := A^{-1} B
В результаті отримаємо:
``mathcad
X =
\begin{pmatrix}
-2 \\
1 \\
0
\end{pmatrix}
```

Отже, розв'язок СЛР $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix};$$

$$f = [7; 11; 12];$$

$$x = A \setminus f$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 12 \end{cases}$$

Використання інтерактивного геометричного середовища GeoGebra актуальне щодо таких розділів курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», у яких крім обчислень необхідно виконувати і геометричні побудови математичних об'єктів, що вивчаються.

Наприклад, у процесі вивчення теми «Лінії другого порядку, їх канонічні рівняння та зображення» виконуються геометричні побудови наступних кривих: еліпса, гіперболи, параболи. А також розглядаються різні форми цих кривих та їхнє розташування на координатній площині залежно від заданого рівняння. Використовуючи динамічність образів, що створюються з використанням програми GeoGebra, можна показати студентам зміну форми еліпса в залежності від відношення його великої та малої півосей (a та b). На рисунку 2 зображено еліпс для випадку, коли його велика вісь лежить на осі Ox , тобто $a > b$. Використовуючи динамічність створеного образу, досягнемо рівності великої і малої півосей еліпса, тобто $a = b$. Графік еліпса, як показано на рисунку 3, перетворюється на коло.

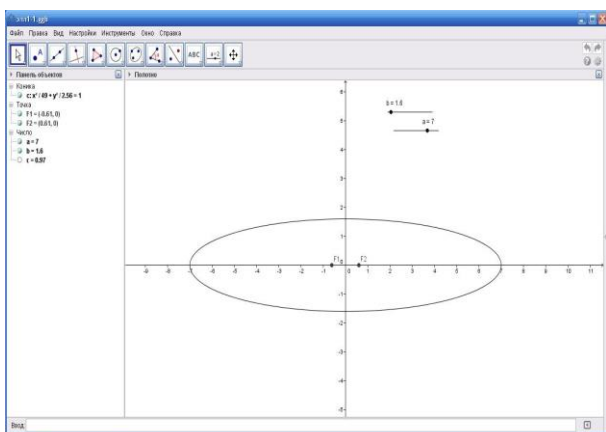


Рис. 2. Побудова еліпса в GeoGebra

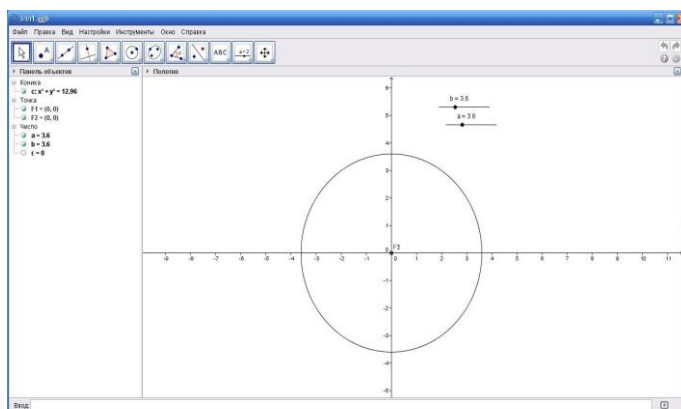


Рис. 3. Побудова кола в GeoGebra

Інтерактивне геометричне середовище GeoGebra також можна використовувати в процесі вивчення гіперболи та параболи.

Знайти площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $9x^2 - 4y^2 = 36$ і прямої $9x + 2y - 12 = 0$.

Використовуючи програму GeoGebra, побудуємо гіперболу та її асимптоти, потім задану пряму. Таким чином, отримуємо трикутник ABC , після чого знаходимо його площу. Побудова трикутника, а також усі обчислення, одержані у процесі розв'язання задачі, показані на рисунку 4.

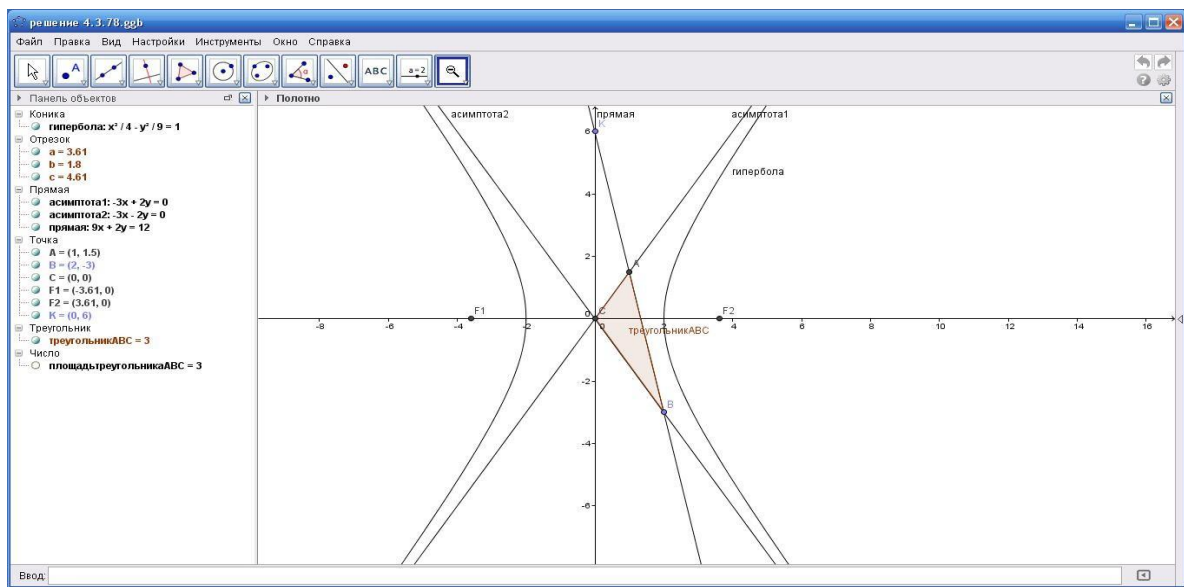


Рис.4. Приклад розв'язання в GeoGebra

Застосування інтерактивного геометричного середовища GeoGebra в ході розв'язування завдань, а також при вивченні лекційного матеріалу дозволяє виконати наочне зображення всіх математичних об'єктів, що сприяє кращому розумінню нового матеріалу, прискорює процес розв'язання задач, спрощує обчислення.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. З погляду педагогічних технологій вкрай важливо дозволити студентам випробувати різні методи вирішення тих самих навчальних завдань. Відчувши вплив мінімальної зміни вихідних даних на отриманий результат, студенти починають уважніше ставитися до чисельних значень у завданнях, поважати деталі, звертати більше уваги на дрібниці, навчаються аналізувати зміни і під час вирішення математичних завдань, й у житті, й у вчинках. Уважне вивчення математики сприяє формуванню відповідальнішого ставлення до життя, виховує любов до продуманого, послідовного виконання різних дій.

Використання у навчальній діяльності різних комп'ютерних пакетів дозволяє індивідуалізувати навчальну діяльність студентів, з першого курсу відчути досвід наукової роботи під час розв'язування задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії різними способами. Безліч можливостей досягнення мети формує цілісніше бачення постановки навчальної проблеми, а також формує можливість широкого спектру самостійної діяльності студента у науковій сфері. Використання комп'ютерних програм заощаджує час, наприклад, дозволяє використовувати матриці більшої розмірності та вирішувати виробничо-орієнтовані задачі. Рекомендуємо зіставляти можливість використання спеціалізованих комп'ютерних пакетів під час навчання студентів першого курсу з навичками роботи студентів у програмному середовищі.

Впровадження розглянутих комп'ютерних програм у навчальний процес дало позитивну динаміку результатів вивчення студентами курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». Студенти, звичні до використання комп'ютерних технологій, перебувають у комфортному для себе психологічному середовищі, що покращує результат навчальної діяльності. Можливості даних математичних програм можна використовувати і при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Вища та прикладна математика», «Теорія ймовірностей та математична статистика». Вищезазначені комп'ютерні програми освітнього призначення дозволяють здійснити візуалізацію абстрактних математичних понять, що сприяє якнайшвидшому сприйняттю матеріалу, більш глибокому його розумінню і підвищує інтерес до дисципліни.

Список бібліографічних посилань

1. Балик Н.Р. (2017). Підходи та особливості сучасної STEM-освіти. *Фізико-математична освіта*, 2(12), 26-30.
2. Гулівата І.О. (2019). Інноваційні методи забезпечення змісту навчання математики. *Журнал інформаційних технологій в освіті (ІТЕ)*, 41, 64-74.
3. Гулівата І.О., Гусак Л.П., Радзіховська Л.М. (2018). *Вища та прикладна математика: теорія ймовірностей: навч. посібник*. 208 с.

4. Дубовик В.В. (2021). Використання середовища GeoGebra на практичних заняттях з лінійної алгебри під час навчання студентів педагогічних університетів. *Scientific Collection «InterConf»*. Вип. 52. Brighton, Great Britain: A.C.M. Webb Publishing Co Ltd., С. 167–174.
5. Кравченко І. В., Микитенко В. І. (2018). Інформаційні технології: Системи комп'ютерної математики: навч. посібник. 243 с.
6. Левчук О.В. (2019). Математичне моделювання на базі Mathcad як засіб формування професійної компетентності майбутніх економістів. Економіка, фінанси, менеджмент: актуальні питання науки і практики. № 5. С. 73-83.
7. Радзіховська Л. М., Гусак Л.П. (2019). Використання табличного процесора MS EXCEL у викладанні дисциплін професійного спрямування в економічних ЗВО. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: теорія, досвід, проблеми*. Вип. 54. с. 136-140.
8. Samura A. O., Darhim, Juandi D. (2021). Improving the Creative Thinking Ability of Junior High School Students Through GeoGebra Assisted Learning Community in Mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies* 15(22), 84–98. URL: <https://online-journals.org/index.php/i-jim/article/view/24797/10255> (дата звернення: 12.09.2024).
9. Хоцькіна В.Б., Вдовиченко І.Н. (2023). Робота в пакеті MATLAB: навч. посібник. 130 с.
10. Yuliardi R. (2017). Mathematics Learning Assisted Geogebra using Technologically Aligned Classroom (TAC) to Improve Communication Skills of Vocasional High School Student. *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1), 012156. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/895/1/012156/pdf> (дата звернення: 11.09.2024).

References

1. Balyk N.R. (2017). Pidkhody ta osoblyvosti suchasnoyi STEM-osvity. *Fizyko-matematychna osvita*, 2(12), 26-30.
2. Hulivata I.O. (2019). Innovatsiyni metodyky zabezpechennya zmistu navchannya matematyky. *Zhurnal informatsiynykh tekhnolohiy v osviti (ITE)*, 41, 64-74.
3. Hulivata I.O., Husak L.P., Radzikhov's'ka L.M. *Vyshcha ta prykladna matematyka: teoriya ymovirnostey: navch. posibnyk* (2018), 208 s.
4. Dubovyk V.V. (2021). Vykorystannya seredovyscha GeoGebra na praktychnykh zanyattiyakh z liniynoyi alhebruy pid chas navchannya studentiv pedahohichnykh universytetiv. *Scientific Collection «InterConf»*. Vyp. 52. Brighton, Great Britain: A.C.M. Webb Publishing Co Ltd., S. 167–174.
5. Kravchenko I. V., Mykytenko V. I. (2018) *Informatsiyni tekhnolohiyi: Systemy komp'yuternoyi matematyky: navch. posibnyk*. 243s.
6. Levchuk O.V. (2019). Matematychno modelyuvannya na bazi Mathcad yak zasib formuvannya profesiynoyi kompetentnosti maybutnikh ekonomistiv. *Ekonomika, finansy, menedzhment: aktual'ni pytannya nauky i praktyky.. № 5. S. 73-83*.
7. Radzikhov's'ka L. M., Husak L.P. (2019). Vykorystannya tablychnoho protsesora MS EXCEL u vykladanni dystsyplin profesiyneho spryamuvannya v ekonomichnykh ZVO. *Suchasni informatsiyni tekhnolohiyi ta innovatsiyni metodyky navchannya v pidhotovtsi fakhivtsiv: teoriya, dosvid, problemy*. Vyp. 54. s. 136-140.
8. Samura, A.O. & Darhim, Juandi, D. (2021). Improving the Creative Thinking Ability of Junior High School Students Through GeoGebra Assisted Learning Community in Mathematics. *International Journal of Interactive Mobile Technologies* 15(22), 84-98. Retrieved from: <https://online-journals.org/index.php/i-jim/article/view/24797/10255> (accessed 12.09.2024).
9. Khotskina V.B., Vdovychenko I.N. (2023). *Robota v paketi MATLAB: navch. posibnyk*. 130 s.
10. Yuliardi R. (2017). Mathematics Learning Assisted Geogebra using Technologically Aligned Classroom (TAC) to Improve Communication Skills of Vocasional High School Student. *Journal of Physics: Conference Series*, 895(1), 012156. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/895/1/012156/pdf> (accessed 11.09.2024).