УДК 514.18
Верещага В.М., д.т.н., Лисенко К.Ю., аспірантка
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

ДВОПАРАМЕТРИЧНА КОМПОЗИЦІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ДИСКРЕТНО ПОДАНОЇ ПОВЕРХНІ

Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Двопараметрична композиційна інтерполяція дискретно поданої поверхні. Геометрична фігура дискретно поданої поверхні визначається рядами точок у кожному з двох напрямків. Вихідні точки приймаються як базисні, відносно яких виконується композиційна інтерполяція, у якій будь-яка поточна точка визначається як композиція часток усіх базисних точок безвідносно до вихідної системи координат. Розмір частки, що визначає участь у формування поточної точки, для кожної з базисних точок, дорівнює значенню відповідних координат Балюби-Найдиша.
Ключові слова. Композиційна інтерполяція, дискретно подана поверхня, базисні точки, координати Балюби-Найдиша, уніфікація геометричної фігури.

Верещага В.М., Лысенко К.Ю. Двухпараметрическая композиционная интерполяция дискретно представленной поверхности. Геометрическая фигура дискретно представленной поверхности определяется рядами точек в каждом из двух направлений. Исходные точки принимаются как базовые, относительно которых выполняется композиционная интерполяция, в которой любая текущая точка определяется как композиция долей всех базисных точек безотносительно к исходной системе координат. Размер доли, которая определяет участие в формирование текущей точки, для каждой из базисных точек, равен значению соответствующих координат Балюбы-Найдыша.
Ключевые слова. Композиционная интерполяция, дискретно представлена поверхность, базисные точки, координаты Балюбы-Найдыша, унификация геометрической фигуры.

Vereshchaga V., Lysenko K. Two-parameter composite interpolation of a discrete surface. The geometric figure of the discrete surface is determined by the rows of points in each of the two directions. Output points are taken as basic, for which a composite interpolation is performed, in which any current point is defined as the composition of the particles of all base points irrespective of the origin of the coordinate system. The particle size, which determines the participation in the formation of the current point, for each of the basis points, is equal to the value of the corresponding coordinates of the Balyuba-Naidysh.
Keywords. Composite interpolation, discretely subjected surface, base points, Balyuby-Naidysh's coordinates, unification of a geometric figure.

Постановка наукової проблеми. Як правило, застосування високотехнологічного обладнання є ефективним, коли суб’єкти господарювання мають систему керування цим обладнанням. Функціонування такого обладнання визначається достатньо великою кількістю факторів технологічних процесів, які постійно змінюються і які необхідно враховувати щодня для прийняття управлінських рішень, застосовуючи, при цьому, комп’ютери поширеної комплектації. При цьому, особа, що приймає рішення (ОПР) не повинна мати спеціальної математичної підготовки. Математичні методи для ОПР мають бути «чорною скринькою» і, у той же час, у системі керування технологічними процесами підмоделі мають бути побудованими на засадах одного способу. Створювана модель має бути розрахованою на щоденне використання з метою аналізу і розв’язання багатофакторних задач, які враховують сотні факторів і якісний аналіз яких підвищує ефективність функціонування об’єкту.

Створення методу моделювання, здатного враховувати вимоги, що наведені вгорі, є проблемою.

Результати дослідження, що наводяться у цій статті, будуть наближати розв’язання сформульованої вище проблеми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Розвиток точкового числення Балюби-Найдиша (БН-числення) [8, 9] створив засади для розвинення подальшої геометричної формалізації записів у вигляді композиційних матриць [12], подальший розвиток теорії яких відбувався у роботах [2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11].

У відповідності до [12] надано визначення композиційних матриць.

Композиційна матриця (КМ) – це таблиця чисел або символів, що мають форму (абрис), які відповідають формам сегментів вихідних геометричних фігур, для яких вона складається. Елементи КМ не є довільно обраними, а корелюються певними вихідними умовами і розташовані таким же самим чином як і відповідні їм точки на сегменті вихідної геометричної фігури.

У роботі [12] запропоновано позначати КМ:

$A_T = \left(\left(A_{ij}\right)\right)$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – КМ точкова, індекс «T»;

$A_П = ((a_{ij}))$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – КМ параметрична, індекс «*П*»;

$A(K) = ((A_{ij}(K)))$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – КМ координатна, де *K* – номер відповідної координати.

У роботах [7, 12] розроблено операції над КМ, вкажемо на деякі з них.

Добуток КМ параметричної на КМ точкову є КМ геометричної фігури (ГФ) $A_Ф$, елементами якої є добуток відповідних (з однаковими подвійними індексами) елементів КМ співмножників.

$$A_Ф = A_П \cdot A_Т = ((a_{ij})) \cdot ((A_{ij})) = ((a_{ij} \cdot A_{ij})) \text{ для } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \quad (1)$$

Добутком двох КМ параметричних $A_П$ та $B_П$ єсть КМ параметрична $C_П$, елементами якої є добуток відповідних (з однаковими подвійними індексами) елементів КМ співмножників:

$$C_П = A_П \cdot B_П = ((a_{ij})) \cdot ((b_{ij})) = ((a_{ij} \cdot b_{ij})) = ((c_{ij})) \text{ для } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \quad (2)$$

Операції, аналогічні (1), виконуються над КМ координатними, за якими виконуються розрахунки щодо розв'язку.

Покажемо, у відповідності до [13], записи координатних КМ для фігури Балюби (Б-фігури) з (3):

$$A_Б = ((a_{ij} \cdot A_{ij})),\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}, \quad (3)$$

тоді розрахункові координатні КМ для *K*-координат ($K = \overline{1,k}$) матимуть вигляд:

$$A_Б(K) = ((a_{ij} \cdot A_{ij}(K))) \text{ для } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ K = \overline{1,k} \quad (4)$$

У відповідності до [12, 13], під Б-фігурами треба розуміти такі ГФ, положення поточної точки на яких визначається відносно її базисних точок. Базисними точками є полюси інтерполяції.

Як вказується у роботі [13], для застосування композиційної інтерполяції необхідно вихідну ГФ поділити на дві складові: параметричну та геометричну. Процес поділення названо уніфікацією ГФ, а результат – уніфікованою ГФ.

Параметрична складова уніфікованої ГФ представляється КМ параметричною. Геометрична складова уніфікованої ГФ представляється КМ точковою.

КМ параметрична є моделлю уніфікованої ГФ і не змінюється для сталої кількості точок вихідної ГФ.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. У роботах [7, 12, 13] було доведено і розроблялась двопараметрична композиційна інтерполяція, коли у напрямку *U* для усіх ребер сегменту поверхні застосовувалася одна модель у вигляді КМ параметричної $((P_{1j}))$, для $j = \overline{1,n}$. У трансверсальному напрямку *V* для усіх ребер сегменту поверхні застосовується така сама як і у напрямку *U* або інша, але також одна, для усіх ребер, модель у вигляді КМ параметричної $((P_{i1}))$, для $i = \overline{1,m}$.

Композиційна двопараметрична інтерполяція з різними моделями ребер, у кожному з напрямків *U* та *V*, виявилася проблемою, яку розв'язано у цій статті.

Формулювання мети дослідження. Розробити методику двопараметричної композиційної інтерполяції з різними моделями ребер сегменту поверхні. У кожному з двох напрямків і для кожного з ребер окремо.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо методику на прикладі, коли ребра визначаються трьома точками в обох напрямках.

Нехай дев'ять базисних точок A_{ij}, для $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$; дискретно подають поверхню (ДПП) (рис. 1). Як бачимо, на рис. 1 базисні точки A_{1j}, $j = \overline{1,3}$ дискретно подають перше ребро у напрямку *U*;

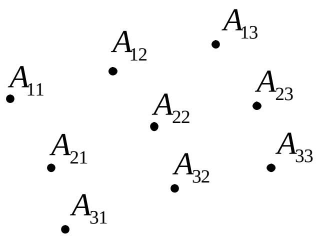

Рис. 1. Схема сегменту Б-поверхні.

Точки A_{2j}, $j=\overline{1,3}$ утворюють ДПК для другого ребра у напрямку *U*;

Точки A_{3j}, $j=\overline{1,3}$ утворюють ДПК для третього ребра у напрямку *U*.

Аналогічно і для напрямку *V*: A_{i1}; A_{i2}; A_{i3} $(i=\overline{1,3})$.

Дискретно поданий шістьма ребрами сегмент поверхні (рис. 2) дістанемо після побудови точкових рівнянь цих ребер.

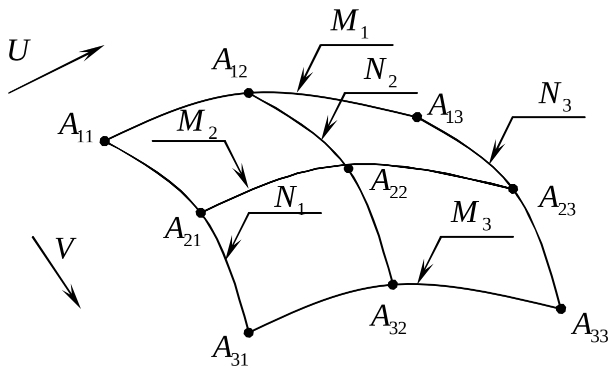

Рис. 2. Схема сегменту Б-поверхні.

Тоді у напрямку *U* точкові рівняння (рис. 2) для М запишемо:

$$M_1=\sum_{j=1}^{3}A_{1j}\cdot p_{1j}\text{; де }\sum_{j=1}^{3}p_{1j}=1;$$

$$M_2=\sum_{j=1}^{3}A_{2j}\cdot p_{2j}\text{; де }\sum_{j=1}^{3}p_{2j}=1; \tag{5}$$

$$M_3=\sum_{j=1}^{3}A_{3j}\cdot p_{3j}\text{; де }\sum_{j=1}^{3}p_{3j}=1.$$

Уніфіковане подання яких у вигляді КМ точкової та КМ параметричної матимуть вигляд:

$$\left(\left(A_{ij}\right)\right)\text{, для } i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3};$$

$$\left(\left(p_{ij}\right)\right)\text{, для } i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}. \tag{6}$$

У напрямку *V* точкові рівняння (рис. 2) для N_j матимуть вигляд:

$$N_1=\sum_{i=1}^{3}A_{i1}\cdot q_{i1}\text{; де }\sum_{i=1}^{3}q_{i1}=1;$$

$$N_2=\sum_{i=1}^{3}A_{i2}\cdot q_{i2}\text{; де }\sum_{i=1}^{3}q_{i2}=1; \tag{7}$$

$$N_3=\sum_{i=1}^{3}A_{i3}\cdot q_{i3}\text{; де }\sum_{i=1}^{3}q_{i3}=1.$$

Для (7) уніфіковане подання у вигляді КМ точкової таке, які у (6), а КМ параметрична матиме вигляд:

$$\left(\left(q_{ij}\right)\right), \text{ для } i=\overline{1{,}3};\ j=\overline{1{,}3}. \qquad (8)$$

У сукупностях точкових рівнянь (5) та (7) параметри p_{ij} та q_{ij} є характеристичними функціями, тобто такими, що приймають значення 1 або 0, у базисних точках, техніку формування яких було розроблено у роботах [14, 15].

Вказана сукупність (5), (7) являє собою шість окремих сегментів Б-ліній, від яких необхідно перейти до рівняння сегменту Б-поверхні. Як було доведено у [7, 12, 13], необхідно знайти добуток з (6) та (8) у відповідності до (2):

$$\left(\left(p_{ij}\right)\right)\cdot\left(\left(q_{ij}\right)\right)=\left(\left(p_{ij}\cdot q_{ij}\right)\right), \text{ для } i:\ j=\overline{1{,}3} \qquad (9)$$

КМ параметрична (9) не є моделлю сегмента Б-поверхні через те, що сума її елементів не дорівнює одиниці.

Для переходу від моделі (9) параметричної поверхні до моделі Б-поверхні, знайдемо суму δ усіх елементів КМ параметричної (9):

$$\delta=\sum_{i:j=1}^{3} p_{ij}\cdot q_{ij}\ . \qquad (10)$$

Потім кожний з доданків (10) необхідно поділити на δ, дістанемо модель Б-поверхні у вигляді КМ параметричної:

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{p_{11}\cdot q_{11}}{\delta} & \frac{p_{12}\cdot q_{12}}{\delta} & \frac{p_{13}\cdot q_{13}}{\delta} \\ \frac{p_{21}\cdot q_{21}}{\delta} & \frac{p_{22}\cdot q_{22}}{\delta} & \frac{p_{23}\cdot q_{23}}{\delta} \\ \frac{p_{31}\cdot q_{31}}{\delta} & \frac{p_{32}\cdot q_{32}}{\delta} & \frac{p_{33}\cdot q_{33}}{\delta} \end{pmatrix}\right)=\left(\left(a_{ij}\right)\right)=\underset{3\times 3}{A_П}\ , \text{ де} \qquad (11)$$

$a_{ij}=\dfrac{p_{ij}\cdot q_{ij}}{\delta}$ – усі ці елементи єсть БН-координатами, а КМ (11) єсть моделлю Б-поверхні.

Враховуючи (6) та (11), та спираючись на (1), створимо КМ Б-поверхні $A_Б$:

$$A_Б=A_Т\cdot A_П=\left(\left(A_{ij}\right)\right)\cdot\left(\left(a_{ij}\right)\right)=\left(\left(A_{ij}\cdot a_{ij}\right)\right) \text{ для } i:\ j=\overline{1{,}3}. \qquad (12)$$

Розкриємо КМ для Б-поверхні з (12):

$$A_Б=\left(\begin{pmatrix} A_{11}\cdot a_{11} & A_{12}\cdot a_{12} & A_{13}\cdot a_{13} \\ A_{21}\cdot a_{21} & A_{22}\cdot a_{22} & A_{23}\cdot a_{23} \\ A_{31}\cdot a_{31} & A_{32}\cdot a_{32} & A_{33}\cdot a_{33} \end{pmatrix}\right) \qquad (13)$$

Оскільки КМ є для Б-поверхні, то параметри a_{ij} являють собою БН-координати, а це означає, що їх сума дорівнює одиниці:

$$\sum_{i:j=1}^{3} a_{ij}=1 \qquad (14)$$

Точкове рівняння *M* сегменту Б-поверхні визначається як сума елементів КМ $A_Б$ з (13)

$$M=\sum_{i:j=1}^{3} A_{ij}\cdot a_{ij} \qquad (15)$$

У відповідності до (4), запишемо координатні рівняння для (15), які відображають проекцію Б-кривої на кожну з *K* осей:

$$M(1)=\sum_{i:j=1}^{3} A_{ij}(1)\cdot a_{ij}\ ;\ M(2)=\sum_{i:j=1}^{3} A_{ij}(2)\cdot a_{ij}\ ;\ \ldots;\ M(k)=\sum_{i:j=1}^{3} A_{ij}(k)\cdot a_{ij} \tag{16}$$

Оскільки між усіма проекціями $M(K),\ K=\overline{1,k}$ існує параметричний зв'язок, то, враховуючи результати [7, 12], можемо будувати проекції на площини проекцій, об’єднуючи по дві проекції на осях; на 3-простори, об’єднуючи по три проекції на осях; на 4-простори, об’єднуючи по чотири проекції на осях і так далі.

Наприклад, використовуючи (16), визначимо проекцію на площині проекцій, яку утворюють перша та *K*-та осі, створивши наступну систему точкових рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} M(1)&=\sum_{i:j=1}^{3} A_{ij}(1)\cdot a_{ij} \\ M(k)&=\sum_{i:j=1}^{3} A_{ij}(k)\cdot a_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

У відповідності до [16] таких варіантів існує C_k^2, тобто $C_k^2=\dfrac{k!}{2!(k-2)!}$.

Висновки. Розроблений, у наведеній статті, метод двопараметричної композиційної інтерполяції дискретно поданої поверхні через побудову Б-поверхні з різними точковими рівняннями її ребер, являє собою наукову новизну. Застосування цього методу дозволить підвищити варіативність розв’язків оптимізаційних задач, збільшити кількість вихідних факторів. Збільшення кількості вихідних факторів, що будуть враховані у моделюванні, підвищить адекватність побудованої моделі.

Перспективи подальших досліджень. На нашу думку, подальші дослідження слід розвивати у бік збільшення кількості базисних точок, що визначають ребра ДПК в обох параметричних напрямках; у бік з’ясування причин та запобігання появи неконтрольованих точок перегину на лініях ДПК.

1. Адоньєв Є.О., Верещага В.М., Найдиш А.В. Застосування геометричних матриць для утворення точкових рівнянь Б-поверхонь / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага, А.В. Найдиш // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. - Мелітополь: ТДАТУ, 2018. - Вип. 8, Т.1. – С. 153-160.

2. Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Концептуальні засади використання композиційного методу геометричного моделювання при формуванні оптимального портфелю проектів з енергозбереження в навчальних закладах. / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 9. – С. 3-10.

3. Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Один із способів геометричної формалізації ситуацій окремого фактору / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 10. – С. 5-16.

4. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання: Монографія / Є.О. Адоньєв. – Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017. – 98 с.

5. Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Особливості Б-ліній, Б-поверхонь, визначення, переваги та можливості застосування у композиційному методі геометричного моделювання / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). Т.2. – С. 249-255.

6. Адоньєв Є.О., Верещага В.М. Розробка та дослідження властивостей геометричних матриць / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Вісник НТУ «ХПІ». 2017. №33(1255) – С. 13 – 17.

7. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис..докт.техн.наук. – К.: КНУБА, 2018. – 512 с.

8. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления. Автореф.дисс…докт.техн.наук. - К.: КГТУСА, 1995.-36 с.

9. Балюба И.Г. Точечное исчисление [учебное пособие] / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. Верещаги В.М. // Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б.Хмельницкого. – 2015. – 234 с.

10. Верещага В.М. Геометрична формалізація у моделюванні процесів термореновації будівель / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.О. Лебедєв, Д.В. Спірінцев // The development of technical sciences: problems and solutions: Conference Proceedings. – April 27–28, 2018. – Brno: Baltija Publishing. – Pages 132-134.

11. Верещага В.М., Адоньєв Є.О. Монофакторний принцип побудови моделі багатофакторних задач термореновації будівель / В.М. Верещага, Є.О. Адоньєв // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 7. – С. 24-31.

12. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія / В.М. Верещага. – Мелітополь: ФОП Однорог Т.В. – 2017. – 108 с.

13. Лисенко К.Ю. Особливості композиційного геометричного моделювання / К.Ю. Лисенко, А.В. Найдиш, І.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К., 2019. – Вип. 95. – с. 131-137.

14. Лисенко К.Ю. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для трьох точок / К.Ю. Лисенко, Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2016. – №50.

15. Лисенко К.Ю. Розробка узагальненої техніки алгебраїчного формування Б-функцій для чотирьох точок / К.Ю. Лисенко, Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2017. – №16.

16. Семендяев К.А., Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. инд. перераб. [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1980, - 996с.