DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2023-52-08
УДК 517.97
Григор'єв Ю.О., к. фіз-мат. н., доцент,
https://orcid.org/0000-0002-7114-834X
Одеський національний морський університет, м.Одеса, Україна

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА З ДВОМА ЯДРАМИ У ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Григор'єв Ю.О. Екстремальна задача для оператора з двома ядрами у просторах узагальнених функцій. У статті розглядається екстремальна задача для оператора з двома ядрами у просторах узагальнених функцій. Наголошується, що за відсутності "регулярної" асимптотики модулів нулів (навіть якщо всі вони лежать на одному промені) поведінку функції передбачити важко. У ситуації, коли на нулі досліджуваного підкласу цілих функцій задані деякі обмеження, але будь-який "правильний" розподіл нулів відсутній, можна вирішувати тільки екстремальні задачі тих чи інших асимптотичних характеристик функцій заданого класу. Підкреслено, що актуальність розгляду узагальнених функцій зумовлений численними їх застосуваннями у таких важливих розділах комплексного аналізу, як проблеми повноти експонентних систем, теорія інтерполяції, теорія аналітичного продовження. Представлено екстремальну задачу знаходження функції для оператора з двома ядрами у просторах узагальнених функцій типу Соболева-Слободецького за відповідними умовами. Наголошується, що все інше, окрім поданого, у задачі задано. Розв'язок задачі подано у квадратурах. Розв'язок записано через проекційні оператори та оператори перетворення Фур'є.

Позначивши вираз під модулем та врахувавши умови розв'язності рівняння у згортках з двома ядрами, сформовано дві задачі: екстремальну та задачу визначення функції за відповідними умовами. Де певним чином позначено множину функцій, для яких рівняння з двома ядрами є розв'язним з урахуванням додаткових умов задачі 2.

В роботі доведено, що задача 1 має єдиний розв'язок, цей розв'язок знайдено аналітично. Задача 2 є розв'язною. В образах Фур'є вона зводиться до задачі Рімана в узагальнених функціях. Розв'язок суттєво залежить від величини індексу рівняння з двома ядрами. Якщо індекс менше або дорівнює нулю, то екстремальна задача має єдиний розв'язок. Якщо індекс більше нуля, то розв'язок задачі Рімана не єдиний і залежить від довільних комплексних сталих. Цей розв'язок повинен задовольняти й додатковим умовам задачі 2. Отримано систему рівнянь з невідомими. Доведено, що якщо ранг цієї системи менше індексу, то загальний розв'язок екстремальної задачі залежить від результату віднімання від індексу рангу довільних комплексних сталих.

Ключові слова: екстремальна задача, розв'язання в квадратурах, оператори типу згортки, оператори з двома ядрами, перетворення Фур'є, задача Рімана теорії аналітичних функцій, узагальнені функції.

Hryhoriev Yu.O. Extreme problem for operator with two kernels in spaces of generalized functions. The article considers an extremal problem for an operator with two kernels in spaces of generalized functions. It is emphasized that in the absence of "regular" asymptotics of the modules of zeros (even if they all lie on the same ray), the behavior of the function is difficult to predict. In a situation where some restrictions are set on the zeros of the studied subclass of entire functions, but there is no "correct" distribution of zeros, only extreme problems of certain asymptotic characteristics of the functions of the given class can be solved. It is emphasized that the relevance of the consideration of generalized functions is due to their numerous applications in such important sections of complex analysis as the problems of completeness of exponential systems, the theory of interpolation, the theory of analytical continuation. The extreme problem of finding a function for an operator with two kernels in the spaces of generalized functions of the Sobolev-Slobodetsky type under appropriate conditions is presented. It is emphasized that everything else, except for the given one, is given in the problem. The solution of the problem is presented in squares. The solution is written in terms of projection operators and Fourier transform operators.

Denoting the expression under the modulus and taking into account the solvability conditions of the equation in convolutions with two kernels, two problems are formed: the extremal problem and the problem of determining the function under the appropriate conditions. Where is denoted in a certain way the set of functions for which the equation with two kernels is solvable subject to the additional conditions of problem 2.

The paper proves that problem 1 has a unique solution, this solution was found analytically. Problem 2 is solvable. In Fourier representations, it is reduced to the Riemann problem in generalized functions. The solution depends significantly on the value of the index of the equation with two kernels. If the index is less than or equal to zero, then the extremal problem has a unique solution. If the index is greater than zero, then the solution of the Riemann problem is not unique and depends on arbitrary complex constants. This solution must also satisfy the additional conditions of problem 2. A system of equations with unknowns is obtained. It is proved that if the rank of this system is less than the index, then the general solution of the extremal problem depends on the result of subtracting the rank of arbitrary complex constants from the index..

Key words: extremal problem, solution in quadratures, operators of convolution type, operators with two kernels, Fourier transform, Riemann problem of the theory of analytic functions, generalized functions.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими чи практичними завданнями. У просторах функцій типу Соболева-Слободецького розглянута задача визначення функції $u(s)$ за умовами

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty k_1(x-s)u_+(s)ds - \int\limits_{-\infty}^0 k_2(x-s)u_-(s)ds - g(x) \in L_2(-\infty,+\infty), \\ \int\limits_{-\infty}^\infty \rho(x)\left|\int\limits_0^\infty k_1(x-s)u_+(s)ds - \int\limits_{-\infty}^0 k_2(x-s)u_-(s)ds - g(x)\right|^2 dx \to \min, \\ \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi_j(x)u(x)dx = \gamma_j, \quad j=1,\dots,N. \end{cases}$$

Всі інші величини задано. Розв'язок задачі існує при довільному цілому індексі оператора з двома ядрами. В образах Фур'є задачу зведено до задачі Рімана в узагальнених функціях та розв'язано в квадратурах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Деякі загальні постановки екстремальних задач

$$\begin{cases} \|Wu-g\| \to \min, \\ u \in \mathcal{A}, \end{cases}$$

де приймають участь оператори типу згортки W, дано в роботі [1]. Ці екстремальні задачі у згортках часто зустрічаються у застосуваннях: до них зводяться чисельні задачі теорії імовірностей [2, с. 62], електротехніки [3], радіотехніки [4], теорії автоматичних систем [5, с. 203], економіки [6], конкретних напрямах математичної фізики [7]. Проте механізм вирішення екстремальної задачі з оператором типу згортки залишається вивченим не повною мірою та потребує детального опрацювання.

Формулювання цілей статті (постановка завдання).

Метою статті є знаходження розв'язку екстремальної задачі для оператора з двома ядрами у просторах узагальнених функцій.

Виклад основного матеріалу. У даній роботі вивчена екстремальна задача з оператором типу згортки виду

$$(Wu)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_1(x-s)u_+(s)ds - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_2(x-s)u_+(s)ds,$$

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x), & x>0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \qquad u_-(x) = \begin{cases} u(x), & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

На шукану функцію $u(x)$ накладено обмеження

$$\left(\varphi_j(x), u(x)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_j(x)} u(x)dx = \gamma_j, \quad j=1,\dots,M.$$

Розв'язок задачі будемо шукати у просторі функцій типу Соболева-Слободецького $L_2\{m;n\}$ [8, с. 261].

Нагадаємо, що простір $L_2\{m;n\}$ є спряженим до простору $L_2\{-m;-n\}$, що складається з функцій $\psi(x)$, $n\ (>0)$ разів диференційовних і достатньо швидко спадаючих на нескінченності:

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|(x+i)^m\left(\frac{d}{dx}+1\right)^n\psi(x)\right|^2 dx.$$

Екстремальна задача розв’язна в квадратурах. Її розв’язок $u_{\pm}(x)\in L_2^{\pm}\{m;n\}$ [8, с, 369] записується через проекційні оператори

$$\left(P^{\pm}\Psi\right)(x) = \frac{1}{2}\Psi(x) \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Psi(t)dt}{t-x}$$

та оператори перетворення Фур’є

$$\Psi(x) = (V\psi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)e^{itx}dt, \quad \psi(t)\in L_2(-\infty,+\infty).$$

Тут і далі великими літерами позначені образи Фур’є, а малими – оригінали. Якщо Ψ - узагальнена функція, то оператори

$$P^{\pm}: L_2\{0;m\}\to L_2^{\pm}\{0;m\},$$
$$V: L_2\{m;n\}\to L_2\{m;n\}$$

визначаються із наступних умов. Для довільної основної функції $\Phi(x)$

$$\left(P^{\pm}\Psi,\Phi(x)\right) = \left(\Psi, P^{\pm}\Phi(x)\right), \quad \Phi(x)\in L_2\{0;-m\},$$
$$\left(V\psi,\Phi(x)\right) = 2\pi\left(\psi,\varphi(x)\right), \quad \Phi(x)\in L_2\{-n;-m\}.$$

1. Постановка задачі. Знайти елементи $u_{\pm}(s)\in L_2\{m;n\}$ за умовами:

$$(Wu)(x) - g(x)\in L_2(-\infty,+\infty), \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left|(Wu)(x)-g(x)\right|^2 dx\to\min, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi_j(s)}u_-(s)ds = \gamma_j, \quad j=1,\dots,p, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi_l(s)}u_+(s)ds = \delta_l, \quad l=1,\dots,q. \tag{4}$$

Решта – задано:

$g(x)\in L_2\{m;n\}$;

ядерні функції $k_j(x)\in L_2\{-m,1\}$ мають на зімкнутій осі m разів диференційовні образи Фур’є,

$0<c<\left|K_j(x)\right|<C<+\infty$;

вагова функція $\rho(x)$ обмежена зверху і знизу додатними сталими;

γ_j і δ_l - задані комплексні числа;

$\varphi_j(x) \in L_2\{-m,-n\}, \quad \psi_l(x) \in L_2\{-m,-n\}$, причому,

$P^-\left((x+i)^n \Phi_j(x)\right)$ - лінійно незалежні функції простору $L_2^-\{0;-m\}$;

$P^+\left((x-i)^n \Psi_l(x)\right)$ - лінійно незалежні функції простору $L_2^+\{0;-m\}$.

Не обмежуючи спільності, можна вважати, що функції $(x+i)^n \Phi_j(x)$ та $(x-i)^n \Psi_l(x)$ належать вказаним вище просторам.

До розв'язання задачі (1) – (4) можна застосувати наступний метод. Позначимо через $\mathcal{M}$ множину тих і тільки тих елементів $v(x) \in \mathcal{M} \subset L_2(-\infty,+\infty)$ для яких задача знаходження $u_\pm(s) \in L_2\{m;n\}$ за умовами (3), (4) та

$$(Wu)(x) - g(x) = v(x) \tag{5}$$

розв'язна. В результаті, задачу (1) – (4) буде зведено до розв'язку двох задач: екстремальної задачі

задача 1
$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\left|v(x)\right|^2 dx \to \min, \\ v(x) \in \mathcal{M} \end{cases}$$

та задачі визначення $u_\pm(x)$ за умовами (3) – (5):

задача 2
$$\begin{cases} (Wu)(x) - g(x) = v(x), \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_j(s)} u_-(s)\,ds = \gamma_j, \quad j = 1,\dots,p, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_l(s)} u_+(s)\,ds = \delta_l, \quad l = 1,\dots,q. \end{cases}$$

Наша мета – довести, що задача 1 має єдиний розв'язок $v(x)$, його можна знайти аналітично. В цьому випадку задача (2) розв'язна, її розв'язок суттєво залежить від величини індексу оператора W ;

$$\chi = n + \operatorname{Ind} K_2(x) - \operatorname{Ind} K_1(x).$$

Далі, в пунктах 2 і 3, наведено розв'язки задачі 2 при $\chi < 0$ і при $\chi \geq 0$ відповідно. Ці розв'язки отримано стандартними методами [8] з використанням апарату перетворення Фур'є та наступної факторизації

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{n-\chi} \frac{K_2(x)}{K_1(x)} = \frac{X^+(x)}{X^-(x)},$$

$$X^{\pm}(x)=\exp\left(\pm P^{\pm}\ln\left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{n-\chi}\frac{K_2(x)}{K_1(x)}\right)\right).$$

Із умов розв’язності задачі знайдемо співвідношення, яким повинні задовольняти елементи множини M. На закінчення, у пункті 4, розв’яжемо екстремальну задачу 1.

2. Розв’язання задачі 2 при $\chi<0$ запишемо в образах Фур’є

$$U^{+}(x)=(x+i)^{n}X^{+}(x)P^{+}\frac{G(x)+V(x)}{(x+i)^{n}K_1(x)X^{+}(x)}, \tag{6}$$

$$U^{-}(x)=-(x-i)^{n}X^{-}(x)\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi}P^{-}\frac{G(x)+V(x)}{(x+i)^{n}K_1(x)X^{+}(x)}.$$

Умови розв’язності рівняння (6) мають вигляд

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{Y_{p+q+j}(x)}V(x)\,dx=2\pi\beta_{p+q+j},\quad j=1,\ldots,|\chi|, \tag{7}$$

$$Y_{p+q+j}(x)=\frac{1}{(x-i)^{n+j}\,\overline{K_1(x)}\,\overline{X^{+}(x)}}\in L_2\{-n;-m\}, \tag{8}$$

$$\beta_{p+q+j}=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{Y_{p+q+j}(x)}G(x)\,dx. \tag{9}$$

Для розв’язності задачі (2) потрібно вимагати виконання умов (3), (4). Підставляючи в ці умови (6), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{Y_j(x)}V(x)\,dx=2\pi\beta_j,\quad j=1,\ldots,p+q. \tag{10}$$

Тут

$$Y_j(x)=\frac{-P^{-}\left((x+i)^{n}\Phi_j(x)\overline{X^{-}(x)}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{-\chi}\right)}{(x-i)^{n}\,\overline{K_1(x)}\,\overline{X^{+}(x)}},\quad j=1,\ldots,p, \tag{11}$$

$$Y_{p+l}(x)=\frac{P^{+}\left((x-i)^{n}\Psi_l(x)\overline{X^{+}(x)}\right)}{(x-i)^{n}\,\overline{K_1(x)}\,\overline{X^{+}(x)}},\quad l=1,\ldots,q,$$

$$\beta_j=\gamma_j-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{Y_j(x)}G(x)\,dx,\quad j=1,\ldots,p+q, \tag{12}$$

$$\gamma_{p+l}=\delta_l,\quad l=1,\ldots,q.$$

Справедливі наступні твердження.

Лема. Нехай $X^{+}(x)$ - аналітично продовжувана на верхню півплощину функція,

$$0<c<\left|X^+(z)\right|<C<+\infty,\quad \operatorname{Im} z\ge 0,$$

χ - ціле число. Тоді для довільної функції $\Psi(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ справедливі властивості

$$P^+\left(\frac{1}{\overline{X^+(x)}}P^+\left(\overline{X^+(x)}\Psi(x)\right)\right)=P^+\Psi(x),\tag{13}$$

$$P^-\left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{|\chi|}\frac{1}{X^+(x)}P^-\left(\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\chi|}X^+(x)\Psi(x)\right)\right)=P^-\Psi(x).\tag{14}$$

Доведення. Для довільного елемента $\Phi^-(x)\in L_2\{0;0\}$ будемо мати

$$\left(\Phi^-(x),P^-\left(\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{|\chi|}\frac{1}{X^+(x)}P^-\left(\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\chi|}X^+(x)\Psi(x)\right)\right)\right)=$$

$$=\left(\Phi^-(x),\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{|\chi|}\frac{1}{X^+(x)}P^-\left(\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\chi|}X^+(x)\Psi(x)\right)\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\chi|}\frac{1}{\overline{X^+(x)}}\Phi^-(x),\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{|\chi|}X^+(x)\Psi(x)\right)=$$

$$=\left(\Phi^-(x),\Psi(x)\right)=\left(\Phi^-(x),P^-\Psi(x)\right),$$

що доводить властивість (14). Властивість (13) доводиться аналогічно.

Теорема 1. Функції $Y_j(x),\quad j=1,\dots,p+q+[\chi]$ належать простору $L_2\{-n;-m\}$ та лінійно незалежні в цьому просторі.

Доведення. Перша частина теореми зрозуміла. Для доведення лінійної незалежності $Y_j(x)$ розглянемо рівність

$$\sum_{j=1}^{p+q+|\chi|}c_jY_j(x)=0.\tag{15}$$

Використовуючи (8), (11) і (15) отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{p}c_jP^-\left((x+i)^n\Phi_j(x)\overline{X^-(x)}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{-\chi}\right)=\sum_{j=1}^{|\chi|}\frac{c_{p+q+j}}{(x-i)^j},\tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{q}c_{p+j}P^+\left((x-i)^n\Psi_j(x)\overline{X^+(x)}\right)=0.$$

Обидві частини рівності (16) помножимо на

$$\frac{1}{\overline{\overline{X^{-}(x)}}}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi}$$

та подіємо оператором P^{-}

$$\sum_{j=1}^{p} c_j P^{-}\left((x+i)^n \Phi_j(x)\right)=0.$$

В наслідок нашого припущення про лінійну незалежність елементів

$$P^{-}\left((x+i)^n \Phi_j(x)\right)$$

заключаємо,

$$c_1=\ldots=c_p=0.$$

Звідси, та із (16) випливає, що

$$c_{p+q+1}=\ldots=c_{p+q+|\chi|}=0.$$

Рівність нулю решти коефіцієнтів

$$c_{p+1}=\ldots=c_{p+q}=0$$

доводиться аналогічно.

Виходить, що лінійна комбінація елементів

$$Y_j(x), \quad j=1,\ldots,p+q+[\chi]$$

дорівнює нулю тільки в одному випадку. Відтак, елементи лінійно незалежні. Теорему доведено.

Теорема 2. При $\chi<0$ елемент $v(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ належить множині M тоді і тільки тоді, якщо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y_j(x)}\, v(x)\,dx=\beta_j, \quad j=1,\ldots,p+q+|\chi|. \tag{17}$$

Доведення випливає із умов (7) і (10), якщо їх записати в оригіналах Фур'є.

Розв'язання задачі 2 при $\chi\geq 0$. Відомо [8], що при $\chi>0$ загальний розв'язок рівняння з двома ядрами (5) залежить від χ довільних комплексних сталих $\mu_1,\ldots,\mu_\chi$. В образах Фур'є розв'язок має вигляд

$$U^{+}(x)=(x+i)^n X^{+}(x)\left(P^{+}\frac{G(x)+V(x)}{(x+i)^n K_1(x)X^{+}(x)}+\sum_{j=1}^{\chi}\frac{\mu_j}{(x+i)^j}\right), \tag{18}$$

$$U^{-}(x)=(x-i)^n X^{-}(x)\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\chi}\left(-P^{-}\frac{G(x)+V(x)}{(x+i)^n K_1(x)X^{+}(x)}+\sum_{j=1}^{\chi}\frac{\mu_j}{(x+i)^j}\right).$$

Підставляючи (18) в умови (3) і (4), отримаємо лінійну систему $p+q$ алгебраїчних рівнянь з χ невідомими $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_\chi)'$. Запишемо систему у матричному вигляді

$$\left[A^{*}\right]_{(p+q)\times\chi}\mu=2\pi\beta-\mathrm{M}V(x). \tag{19}$$

Тут $\beta = \left(\beta_1, \ldots, \beta_{p+q}\right)'$,

$$\mathrm{M}V(x) = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{Y_1(x)} V(x)\,dx \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{Y_{p+q}(x)} V(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці $A_{\chi\times(p+q)}$ мають вигляд

$$a_{jl} = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\Phi_l(x)(x+i)^n \overline{X^-(x)}}{(x-i)^j} \left(\dfrac{x-i}{x+i}\right)^{\chi} dx, \quad l = 1, \ldots, p, \\ j = 1, \ldots, \chi, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\Psi_{l-p}(x)(x-i)^n \overline{X^+(x)}}{(x-i)^j} dx, \quad l = p+1, \ldots, p+q, \end{cases}$$

A^* - спряжена матриця.

Зауваження. Стовпці матриці A складені із лівих частин умов розв'язності задач визначення функцій $\Phi^{\pm}(x) \in L_2^{\pm}\{-n;-m\}$ за умовами:

$$\overline{K_1(x)}\Phi^+(x) - \overline{K_1(x)}\Phi_l(x) = \overline{K_2(x)}\Phi^-(x), \quad l = 1, \ldots, p,$$
$$\overline{K_1(x)}\Phi^+(x) - \overline{K_2(x)}\Psi_{l-p}(x) = \overline{K_2(x)}\Phi^-(x), \quad l = p+1, \ldots, p+q.$$

Наша наступна задача – накласти на функцію $V(x)$ умови, необхідні і достатні для розв'язності рівнянь (19). Із лінійної алгебри відомо, що лінійна система алгебраїчних рівнянь розв'язна тоді і тільки тоді, коли вектор правої частини ортогональний кожному розв'язку $\omega = \left(\omega_1, \ldots, \omega_{p+q}\right)'$ відповідної спряженої однорідної системи

$$A\omega = 0.$$

Якщо r - ранг матриці A, то однорідна система має $p+q-r$ лінійно незалежних розв'язків $\omega^{(l)}$, $l = 1, \ldots, p+q-r$. Отже, для розв'язання рівнянь (19) необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\left\langle \omega^{(i)}, \mathrm{M}V(x) \right\rangle = 2\pi\alpha_l, \quad l = 1, \ldots, p+q-r,$$

де

$$\alpha_l = \left\langle \omega^{(l)}, \beta \right\rangle = \sum_{j=1}^{p+q} \overline{\omega_j^{(l)}} \beta_j;$$

$$\left(\mathrm{M}^{*}\omega^{(l)},V(x)\right)=2\pi\alpha_l,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{p+q}\omega_j^{(l)}Y_j(x),V(x)\right)=2\pi\alpha_l. \quad (20)$$

Позначимо

$$W_l(x)=\sum_{j=1}^{p+q}\omega_j^{(l)}Y_j(x).$$

Теорема 3. Функції $W_l(x)$, $l=1,...,p+q-r$ належать простору $L_2\{-n;-m\}$ та лінійно незалежні в цьому просторі.

Доведення витікає із лінійної незалежності векторів $\omega^{(l)}$ та функцій $Y_j(x)\in L_2\{-n;-m\}$. Лінійна незалежність функцій $Y_j(x),\ j=1,...,p+q$ у випадку $\chi\geq 0$ доводиться так само як і в теоремі 1.

Теорема 4. При $\chi\geq 0$ елемент $v(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ належить множині M тоді і тільки тоді, якщо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{w_l(x)}v(x)dx=\alpha_l,\quad l=1,...,p+q-r. \quad (21)$$

Доведення випливає із умов (20), якщо їх записати в оригіналах Фур'є.

4. Розв'язання задачі 1. В усіх випадках величини індексу χ, екстремальна (1) – (4) зведена до задачі 1. Згідно з теоремами 2 і 4 задача 1 зводиться в знаходженні функції $v(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ за умовами

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left|v(x)\right|^2dx\to\min,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varsigma_j(x)}v(x)dx=\sigma_j,\quad j=1,...,N.\end{cases} \quad (22)$$

Тут $\varsigma_j(x)$ - відомі лінійно незалежні функції простору $L_2(-\infty,+\infty)$; σ_j - задані комплексні числа.

У випадку $\chi<0$

$$\varsigma_j(x)=y_j(x),\quad \sigma_j=\beta_j,\quad N=p+q+|\chi|.$$

У випадку $\chi\geq 0$

$$\varsigma_j(x)=w_j(x),\quad \sigma_j=\alpha_j,\quad N=p+q-r.$$

Задачу (22) можна розв'язати за методом Лагранжа. Розв'язок існує та єдиний

$$v(x)=-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\frac{\varsigma_j(x)}{\rho(x)}.$$

Множники Лагранжа λ_j визначаються із системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{\varsigma_l(x)}\varsigma_j(x)}{\rho(x)}dx=-\sigma_l,\quad l=1,\dots,N.$$

Визначником цієї системи є визначник Грама, складений із лінійно незалежних елементів $\varsigma_j(x)/\sqrt{\rho(x)}$. Тому система має єдиний розв'язок.

Висновки із цього дослідження і дальші перспективи в цьому напрямку

Теорема 5. Екстремальна задача (1) – (4) розв'язна в усіх випадках величини індексу χ.

При $\chi<0$ розв'язок єдиний і виражається в образах Фур'є формулами (6).

При $\chi\geq 0$ розв'язок має образи Фур'є (18). Коефіцієнти μ_j, $j=1,\dots,\chi$, що входять у (18), можна знайти із лінійної системи алгебраїчних рівнянь (19). Якщо $\chi>0$, а $r<\chi$, то коефіцієнти μ_j та загальний розв'язок задачі (1) – (4) залежать від $\chi-r$ довільних комплексних сталих.

Як окремий випадок задачі (1) – (4), відзначимо задачу без додаткових умов (3), (4):

$$\begin{cases}(Wu)(x)-g(x)\in L_2(-\infty,+\infty),\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left|(Wu)(x)-g(x)\right|^2dx\to\min.\end{cases}\qquad(23)$$

Зрозуміло, що при $\chi\geq 0$ ця екстремальна задача стає тривіальною та зводиться до розв'язання рівняння з двома ядрами [8, с. 272]. При $\chi<0$ задача має єдиний розв'язок. Цей розв'язок можна знайти із формул (6), поклавши $p=q=0$.

Приклад. Визначити функції $u_{\pm}(x)\in L_{2\pm}\{1;0\}$ за умовами (23), де $\rho(x)=1$, $g(x)=1$, а

$$(Wu)(x)=u_+(x)-2\int_0^x e^{s-x}u_+(s)ds-u_-(x).$$

В цьому прикладі $\chi=-1$. Допоміжні задачі 1 і 2 мають вигляд

задача 1
$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|v(x)\right|^2dx\to\min,\\ \int_0^{+\infty}e^{-x}v(x)dx=-1,\end{cases}$$

задача 2
$$(Wu)(x)-1=v(x).$$

Розв'язуючи послідовно задачу 1

$$v(x)=\begin{cases}-2e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

і задачу 2, ми знайдемо розв'язок даного прикладу:

$$u_+(x)=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad u_-(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Перспективами подальших досліджень за темою є розгляд ситуації коли інтегральне рівняння з двома ядрами у згортках не має розв'язків, формуванню наближеного чисельно-аналітичного розв'язку такої задачі.

Автор висловлює подяку своєму вчителю, професору Ю.І. Черському, за постановку екстремальних задач у згортках.

Список бібліографічного опису

1. Черский Ю.И. Экстремальные краевые задачи теории аналитических функций. Докл. АН УССР. Сер. А, 1985. № 10. С. 18-21.
2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 319 с.
3. Крейн М.Г., Нудельман П.Я. Аппроксимация функций из $L_2(\omega_1,\omega_2)$ передаточными функциями линейных систем с минимальной энергией. Проблемы передачи информации, 1975. Т. XI, вып. 2. С. 37-60.
4. Гуткин Л.С. теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. Изд. второе. – М.: Советское радио, 1972. 448 с.
5. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1978. 296 с.
6. Постан М.Я. Экономико-математические модели смешанных перевозок. Одесса, "Астропринт", 2006. 376 с.
7. Kh. A. Khachatryan, A. R. Hakobyan, "On nontrivial solvability of one class of nonlinear integral equations with conservative kernel on the positive semi-axis", Уч. записки ЕГУ, сер. Физика и Математика, 2022. 56:1. С.7–18.
8. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свёртки. М.: Наука, 1978. 296 с.

References

1. Cherskij Yu.I. Ekstremalnye kraevye zadachi teorii analiticheskih funkcij. Dokl. AN USSR. Ser. A, 1985. № 10. S. 18-21.
2. Ventcel A.D. Kurs teorii sluchajnyh processov. M.: Nauka, 1975. 319 s.
3. Krejn M.G., Nudelman P.Ya. Approksimaciya funkcij iz peredatochnymi funkciyami linejnyh sistem s minimalnoj energiej. Problemy peredachi informacii, 1975. T. HI, vyp. 2. S. 37-60.
4. Gutkin L.S. teoriya optimalnyh metodov radiopriema pri fluktuacionnyh pomehah. Izd. vtoroe. M.: Sovetskoe radio, 1972. 448 s.
5. Cypkin Ya.Z. Osnovy teorii avtomaticheskih sistem. M.: Nauka, 1978. 296 s.
6. Postan M.Ya. Ekonomiko-matematicheskie modeli smeshannyh perevozok. Odessa, "Astroprint", 2006. 376 s.
7. Kh. A. Khachatryan, A. R. Hakobyan, "On nontrivial solvability of one class of nonlinear integral equations with conservative kernel on the positive semi-axis", Uch. zapiski EGU, ser. Fizika i Matematika, 2022. 56:1. S. 7–18.
8. Gahov F.D., Cherskij Yu.I. Uravneniya tipa svyortki. M.: Nauka, 1978. 296 s.