DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-48-16
УДК 004.415.3
Пех Петро Антонович, к.т.н., доцент
https://orcid.org/0000-0002-6327-3319
Лавренчук Світлана Василівна, к.т.н., доцент
https://orcid.org/0000-0002-5453-3924
Міскевич Оксана Іванівна, асистент
https://orcid.org/0000-0002-5009-2391
Дяченко Роман Олегович, магістр
Луцький національний технічний університет, м. Луцьк, Україна

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАСОБАМИ MATLAB ТА MATLAB SIMULINK

Пех П.А., Лавренчук С.В., Міскевич О.І., Дяченко Р.О. Порівняльний аналіз методів розв'язування диференціальних рівнянь засобами Matlab та Matlab Simulink. В статті зроблена спроба проаналізувати методи розв'язування диференціальних рівнянь засобами Matlab та Matlab Simulink. Наведені коди програм, структурні схеми та результати моделювання двох диференціальних рівнянь.
Ключові слова: диференціальне рівняння, метод Ейлера, метод Рунге-Кутта, вирішувач, Matlab Simulink

Pekh P., Lavrenchuk S., Miskevych O., Diachenko R. comparative analysis of methods that solve differential equations by means Matlab and Matlab Simulink. The article attempts to analyze the methods of solving differential equations be means Matlab and Matlab Simulink**.** Program codes, structural diagrams and simulation results for two differential equations are given.
Keywords: differential equations, Euler's method, Runge-Kutta's method, solver, Matlab Simulink

Постановка задачі. Відомі різні числові методи розв'язування диференціальних рівнянь (ДР) [1,3,4]. Серед них – методи Ейлера, Адамса, Мілна, Рунге-Кутта та інші. Ці методи можуть бути реалізовані у різних програмних середовищах, зокрема і в середовищах Matlab та Matlab Simulink [2]. Варто зазначити, що саме ці два середовища найчастіше використовуються дослідниками для розв'язування ДР. У даній роботі зроблена спроба порівняти різні методи розв'язування ДР, які можна реалізувати в середовищах Matlab та Matlab Simulink .

Метою дослідження було порівняти різні методи розв'язування ДР в середовищах Matlab та Matlab Simulink з точки зору точності отримуваних результатів, складності та простоти реалізації на прикладі двох конкретних ДР.

Новизна дослідження полягає у порівняльному аналізі різних методів розв'язування ДР в середовищах Matlab та Matlab Simulink [1].

Основна частина. У даній роботі пропонуються розроблені авторами Matlab-програми, структурні схеми моделювання засобами Simulink, отримані числові результати та графічні залежності для двох звичайних ДР:

$$y' = x + \sin\left(\frac{y}{2.25}\right); \quad y(1.4) = 2.2; \tag{1}$$

$$y' = 1 + 0.2 * y * sinx - 1.5 * y^2; \quad y(0) = 0; \tag{2}$$

ДР (1) розв'язане:

– за Matlab-програмою, яка реалізує модифікований метод Ейлера (рис. 1 – 3);
– за Matlab-програмою, побудованою на базі вирішувача ode15i (рис. 4 – 6);
– за структурною схемою Simulink (рис. 7 – 8).

ДР (2) розв'язане:

– за Matlab-програмою, яка реалізує модифікований метод Ейлера (рис. 9 – 11);
– за Matlab-програмою, побудованою на базі вирішувача ode45;
– за структурною схемою Simulink (рис. 12 – 14).

З викладеного далі можна зробити висновок, що всі три варіанти розв'язування ДР (програма, вирішувач, структурна схема) фактично забезпечують однакову точність обчислень.

З точки зору реалізації найбільш трудомісткими є варіанти розроблення Matlab-програм, які реалізують той чи інший метод. Однак такий варіант дає змогу бачити весь механізм методу і за необхідності оперативно впливати на ті чи інші його параметри.

Варіант використання вирішувачів значно спрощує процес програмування, і тому найшвидше веде до отримання результатів, однак він не розкриває внутрішньої будови методу.

Варіант розв’язування ДР засобами Simulink вимагає розроблення структурних схем, але саме цей варіант є найбільш прийнятним у випадках, коли доводиться моделювати роботу складних систем. Досить лише порівняти графіки поведінки системи, наведені на рис. 13 – 14, які отримані шляхом моделювання її роботи за різних значень діапазону моделювання.

```
function Modified Euler Method
 % Розв'язування звичайного диференціального рівняння
 % y'=x+sin(y/2.25) на інтевалі [1.4;2.4], якщо y(1.4)=2.2
 % методом Ейлера з уточненням.
 a=1.4; % Ліва межа інтервалу, на якому розв'язується рівняння
 b=2.4; % Права межа інтервалу, на якому розв'язується рівняння
 h=0.1; % Крок розбиття інтервалу
 epsilon=0.001; % Точність обчислень розв'язків
 x=a:h:b+3*h/2; % Формування вектора абсцис точок розв'язку
 for i=1:10 % Обнулення вектора ординат точок розв'язку
  y(i)=0;
 end
 N=(b-a)/h+1;
 % Виведення таблиці розв'язків диференціального рівняння:
 fprintf('\nТаблиця розвязків диференціального рівняння: \n');
 fprintf('  i          x(i)      f(i)       y(i) ');
 y(1)=2.2; % Реалізація початкових умов
 f(1)=x(1)+sin(y(1)/2.25); % Обчислення функції f(x,y)
                           % в точці (x(1)=1.4; y(1)=2.2)
 for i=1:N % Розрахунок ординат точок розв'язку
  yk=y(i);  % Значення yk в точці x(i)
  fk=f(i);  % Значення fk в точці x(i)
  ykk=1;    % Наступне наближення функції ykk
  ykp=0;    % Попереднє наближення функції  ykp
  while abs(ykk-ykp) > epsilon % Поки точність не досягнута, виконувати...
    ykp=ykk; % Коригування попереднього наближення функції ykp
    yk1=yk+h*fk; % Допоміжна величина
    f1k=x(i+1)+sin(yk1/2.25); % Допоміжна величина
    ykk=yk+(fk+f1k)*h/2; % Наступне наближення функції ykk
  end

  fprintf('\n%3d    %10.4f %10.4f %10.4f ',i, x(i), f(i), y(i));
  y(i+1)=ykk; % Формування значення  y(i+1) в точці x(i+1)
  f(i+1)=x(i+1)+sin(y(i+1)/2.25); % Формування значення  f(i+1) в точці x(i+1)
 end
 fprintf('\n');
 % Побудова графіка функції, яка є розв'язком диференціального рівняння
 x=x(1:N);
 y=y(1:N); % Відкидання останнього розрахованого значення вектора y
 graf(x,y);
end

% Побудова графіка функції, яка є розв'язком диференціального рівняння
function graf(x,y)
  figure(1);
  plot(x,y,'r.');
  title('Графік розвязку рівняння dx/dy=x+sin(y/2.25)');
  xlabel('Значення аргумента  x');
  ylabel('Значення функції  y');
  grid on
end
```

Рис. 1. Matlab-програма розв’язування ДР (1) модифікованим методом Ейлера

Таблиця розвязків диференціального рівняння:

i	x(i)	f(i)	y(i)
1	1.4000	2.2293	2.2000
2	1.5000	2.3821	2.4305
3	1.6000	2.5281	2.6759
4	1.7000	2.6648	2.9355
5	1.8000	2.7895	3.2082
6	1.9000	2.8998	3.4927
7	2.0000	2.9937	3.7874
8	2.1000	3.0696	4.0906

Рис. 2. Результати розв'язування ДР (1) модифікованим методом Ейлера

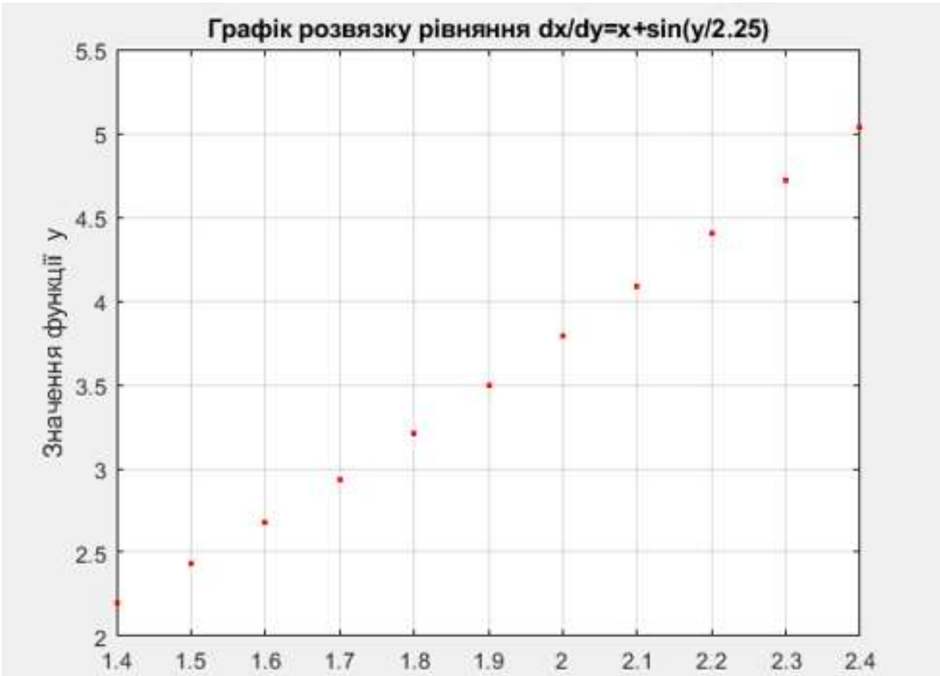


Рис. 3. Графік розв'язку ДР (1) модифікованим методом Ейлера

```
function Differential_Equation_ode15i

% Розв'язування звичайного диференціального рівняння
% y'=x+sin(y/2.25) на інтевалі [1.4; 2.4] за початкових умов y(1.4)=2.2
% за допомогою функції ode15i(@Differential_Equation_ode15i_F, [1.4 2.4],[2.2]).

[X Y]=ode15i(@Differential_Equation_ode15i_F, [1.4 2.4],[2.2]);
fprintf('\nТаблиця розвязків [X Y] диференціального рівняння dy/dx=x+sin(y/2.25):
\n');
[X Y]
figure(1);
plot(X,Y,'r.'), grid on;
title('Графік розвязку рівняння dx/dy=x+sin(y/2.25)');
xlabel('Значення аргумента  x');
ylabel('Значення функції  y');
[X Y]=ode45(@lab_work_21_03_F, [1.4 2.4],[2.2]);
fprintf('\nТаблиця розвязків [X Y] диференціального рівняння dy/dx=x+sin(y/2.25):
\n');
[X Y]
Figure(2);
plot(X,Y,'r.'), grid on;
title('Графік розвязку рівняння dx/dy=x+sin(y/2.25)');
xlabel('Значення аргумента  x');
ylabel('Значення функції  y');
end
```

Рис. 4. Matlab-програма розв'язування ДР (1) на базі підпрограми ode15i

Таблиця розвязків [X Y] ДР dy/dx=x+sin(y/2.25):

i	x(i)	y(i)	i	x(i)	y(i)	i	x(i)	y(i)
1	1.4000	2.2000	10	1.7500	3.0798	19	2.0750	4.0150
2	1.4500	2.3134	11	1.7750	3.1394	20	2.1000	4.0915
3	1.4750	2.3715	12	1.8250	3.2789	21	2.1500	4.2458
4	1.5250	2.4906	13	1.8500	3.3497	22	2.2000	4.4015
5	1.5500	2.5516	14	1.9000	3.4934	23	2.2250	4.4798
6	1.6000	2.6762	15	1.9250	3.5662	24	2.2750	4.6372
7	1.6250	2.7398	16	1.9750	3.7136	25	2.3000	4.7162
8	1.6750	2.8697	17	2.0000	3.7882	26	2.3500	4.8748
9	1.7000	2.9359	18	2.0500	3.9389	27	2.4000	5.0339

Рис. 5. Результати розв'язування ДР (1) за допомогою вирішувача ode15i

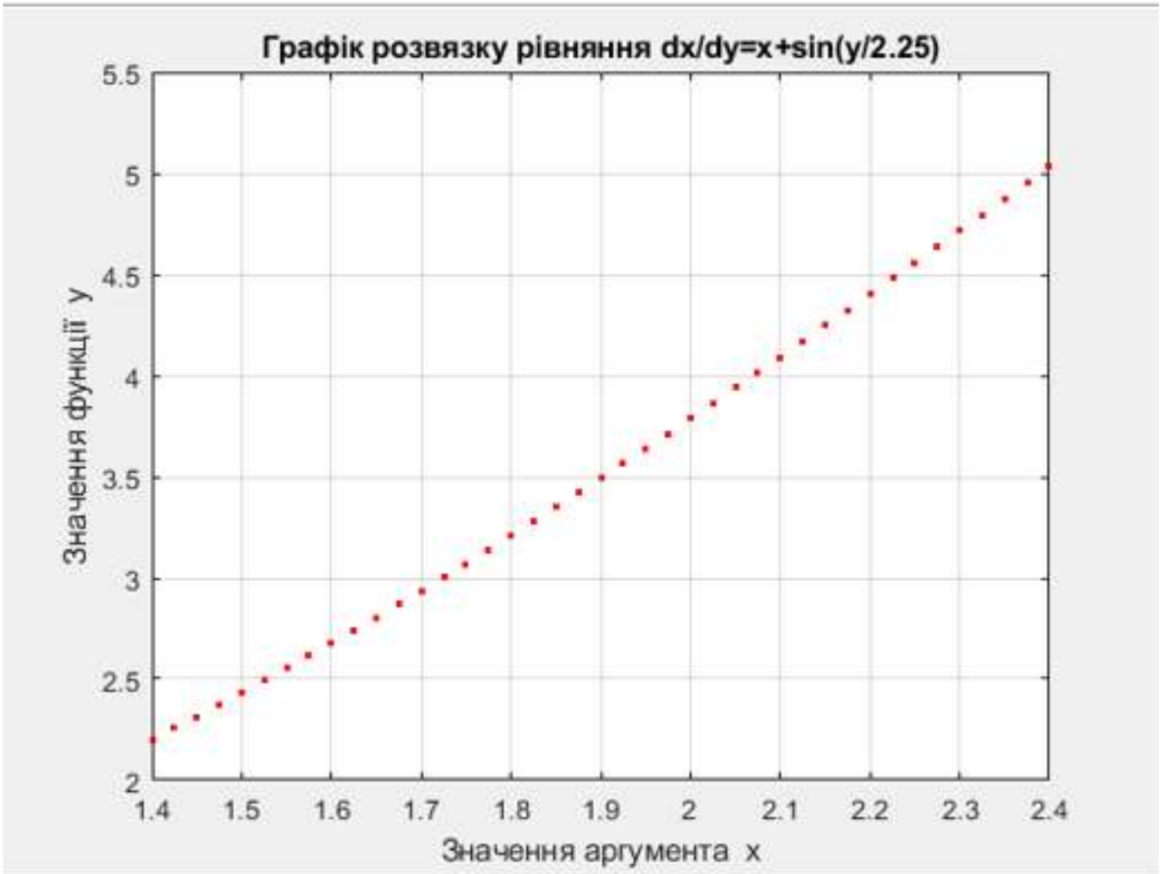
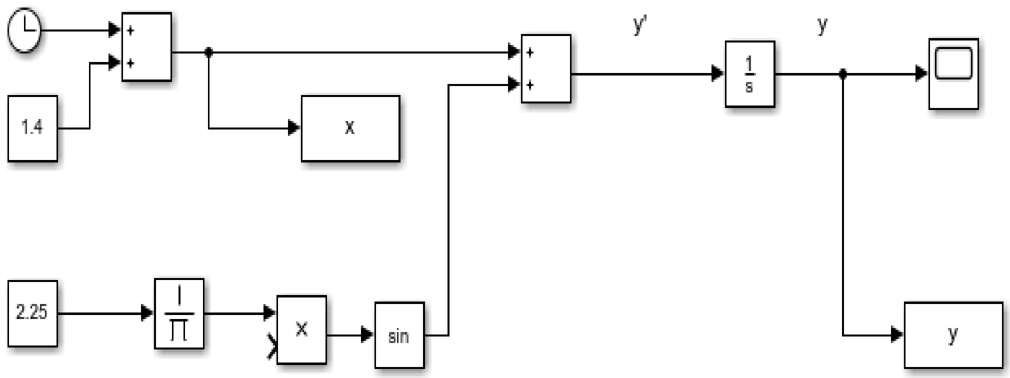


Рис. 6. Графік розв'язку ДР (1) за допомогою вирішувача ode15i

Диференціальне рівняння $dy/dx = x + sin(y/2.25)$ за початкових умов $y(1.4) = 2.2$ на інтервалі [1.4; 2.4] з кроком h=0.1



N	x	y
1	1.4	2.2000
2	1.5	2.4305
3	1.6	2.6759
4	1.7	2.9355
5	1.8	3.2082
6	1.9	3.4927
7	2.0	3.7804
8	2.1	4.0906
9	2.2	4.4004
10	2.3	4.7151
11	2.4	5.0327

Рис. 7. Структурна схема та результати моделювання ДР (1) засобами Simulink

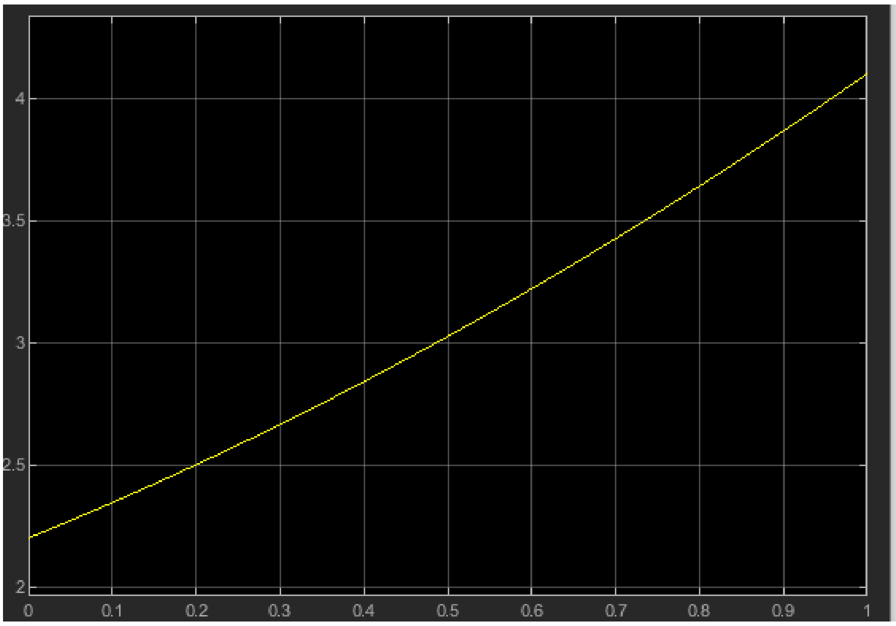


Рис. 8. Графік розв'язку ДР (1) засобами Simulink

```
function Runge Kutta Method
 % Розв'язування звичайного диференціального рівняння
 % y'=1+0.2*y*sin(x)-1.5*y.^2 на інтервалі [0;1] з кроком h=0.1
 % за початкових умов y(0)=0 методом Рунге-Кутта.
 a=0;   % Ліва межа інтервалу, на якому розв'язується рівняння
 b=1;   % Права межа інтервалу, на якому розв'язується рівняння
 h=0.1; % Крок розбиття інтервалу
 epsilon=0.001; % Точність обчислень розв'язків
 x=a:h:b+h/2;   % Формування вектора абсцис точок розв'язку
 for i=1:10 % Обнулення вектора ординат точок розв'язку
    y(i)=0;
 end
 y(1)=0; % Реалізація початкових умов
 % Обчислення функції f(x,y) в точці (x(1)=0; y(1)=0):
 f(1)=1+0.2*y(1)*sin(x(1))-1.5*y(1).^2; % Обчислення функції f(x,y)
 N=(b-a)/h+1; % Кількість точок розбиття ітервалу [a;b] з кроком h
  % Виведення таблиці розв'язків диференціального рівняння:
 fprintf('\nТаблиця розвязків диференціального рівняння: \n');
 fprintf('  i       x(i)      y(i)       k1(i)       k2(i)     k3(i)       k4(i)
          dy(i)       y(i+1)')
 for i=2:N+1 % Розрахунок ординат точок розв'язку
  % Обчислення допоміжних величин методу Рунге-Кутта:
  f(i)= 1+0.2*y(i-1)*sin(x(i-1))-1.5*y(i-1).^2;
  k1(i)=(1+0.2*y(i-1)*sin(x(i-1))-1.5*y(i-1).^2);
  k2(i)=(1+0.2*(y(i-1)+h*k1(i)/2)*sin(x(i-1)+h/2)-1.5*(y(i-1)+h*k1(i)/2).^2);
  k3(i)=(1+0.2*(y(i-1)+h*k2(i)/2)*sin(x(i-1)+h/2)-1.5*(y(i-1)+h*k2(i)/2).^2);
  k4(i)=(1+0.2*(y(i-1)+h*k3(i))*sin(x(i-1)+h)-1.5*(y(i-1)+h*k3(i)).^2);
  dy(i)=h*(k1(i)+2*k2(i)+2*k3(i)+k4(i))/6; % Приріст функції на i-ому кроці
  y(i)=y(i-1)+dy(i); % Значення y(i) в точці x(i)
  fprintf('\n%3d    %10.4f %10.4f %10.4f %10.4f %10.4f %10.4f  %10.4f  %10.4f
%10.4f  ',i-1, x(i-1), y(i-1), k1(i), k2(i), k3(i), k4(i), dy(i), y(i));
 end

  fprintf('\n');
  % Побудова графіка функції, яка є розв'язком диференціального рівняння
  y=y(1:N); % Відкидання останнього розрахованого значення вектора y
  graf(x,y);
 end

 function graf(x,y)
   % Побудова графіка функції, яка є розв'язком диференціального рівняння
   figure(1);
   plot(x,y,'r.');
   title('Графік розвязку рівняння dx/dy=1+0.2*y*sin(x)-1.5*y^2');
   xlabel('Значення аргумента  x');
   ylabel('Значення функції  y');
   grid on
 end
```

Рис. 9. Matlab-програма розв'язування ДР (2) методом Рунге-Кутта

Таблиця розвязків диференціального рівняння:

i	x(i)	y(i)	k1(i)	k2(i)	k3(i)	k4(i)	dy(i)	y(i+1)
1	0.0000	0.0000	1.0000	0.9967	0.9968	0.9871	0.0996	0.0996
2	0.1000	0.0996	0.9871	0.9712	0.9715	0.9498	0.0970	0.1966
3	0.2000	0.1966	0.9498	0.9227	0.9236	0.8918	0.0922	0.2888
4	0.3000	0.2888	0.8919	0.8561	0.8578	0.8187	0.0856	0.3745
5	0.4000	0.3745	0.8188	0.7773	0.7797	0.7363	0.0778	0.4523
6	0.5000	0.4523	0.7365	0.6923	0.6953	0.6505	0.0694	0.5217
7	0.6000	0.5217	0.6507	0.6064	0.6098	0.5659	0.0608	0.5825
8	0.7000	0.5825	0.5661	0.5237	0.5273	0.4859	0.0526	0.6350
9	0.8000	0.6350	0.4862	0.4469	0.4505	0.4127	0.0449	0.6799
10	0.9000	0.6799	0.4130	0.3777	0.3811	0.3474	0.0380	0.7179
11	1.0000	0.7179	0.3477	0.3166	0.3197	0.2902	0.0318	0.7498

Рис. 10. Результати розв'язування ДР (2) методом Рунге-Кутта

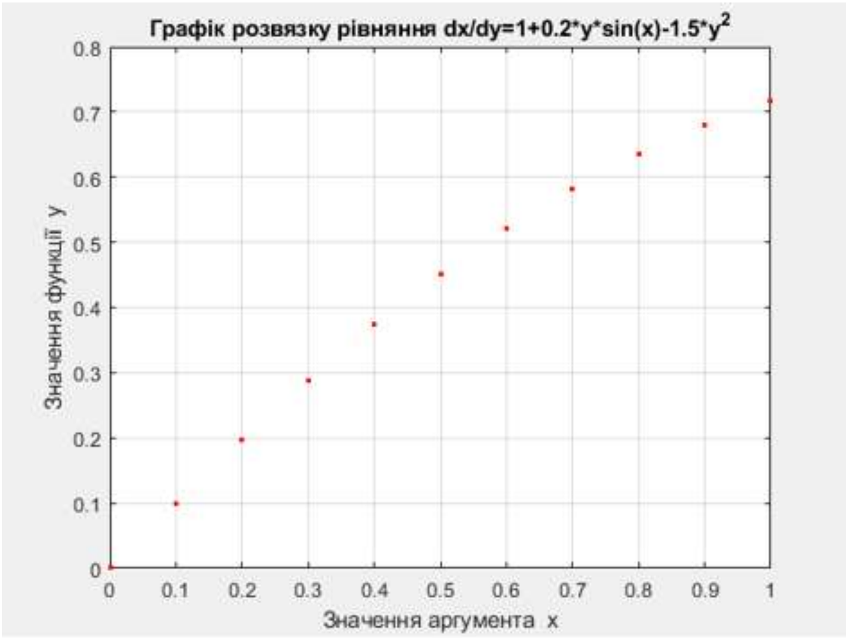
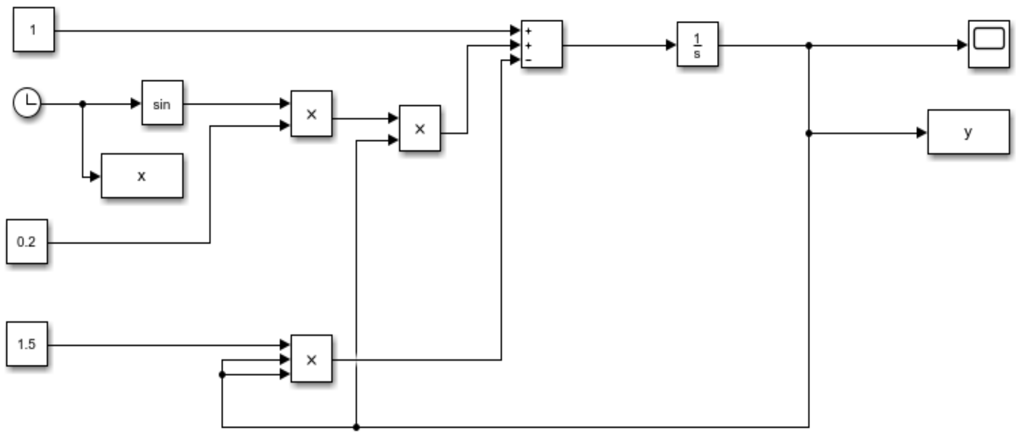


Рис. 11. Графік розв'язку ДР (2) методом Рунге-Кутта

Диференціальне рівняння $dy/dx = 1 + 0.2 * y * sin(x) - 1.5 * y^2$ за початкових умов $y(0) = 0$ на інтервалі [0; 1] з кроком h=0.1



N	x	y
1	0.0	0.0000
2	0.1	0.0996
3	0.2	0.1966
4	0.3	0.2889
5	0.4	0.3745
6	0.5	0.4523
7	0.6	0.5217
8	0.7	0.5825
9	0,8	0.6351
10	0.9	0.6800
11	1.0	0.7179

Рис. 12. Структурна схема та результати моделювання ДР (2) засобами Simulink

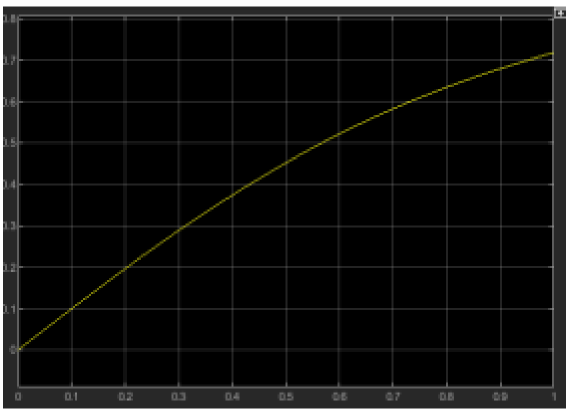


Рис. 13. Графік розв'язку ДР (2) засобами Simulink у разі t=0…1

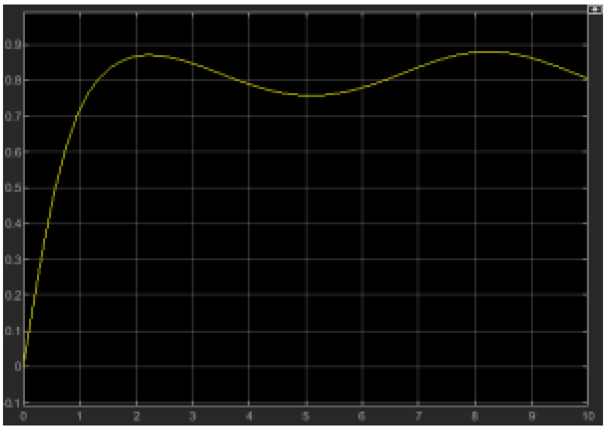


Рис. 14. Графік розв'язку ДР (2) засобами Simulink у разі t=0…10

Висновок. У статті запропоновані дано порівняльний аналіз різних методів розв'язування ДР в середовищах Matlab та Matlab Simulink з точки зору точності отримуваних результатів, складності та простоти реалізації на прикладі двох конкретних ДР.

Список бібліографічного опису

1. Бахвалов, М.С. Чисельні методи: Підручник / М.С. Бахвалов, М.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Біном. ЛЗ, 2011. - 636 с.
2. Дьяконов В.П. Matlab і Simulink для радіоінженерів. – М.: «ДМК-Пресс», 2011. -976 с.
3. Залізняк, В.Є. Чисельні методи. Основи наукових обчислень: Підручник і практикум для академічного бакалаврату / В.Є. Залізняк. - Люберці: Юрайт, 2016. - 356 с.
4. Чисельні методи / Під ред. Лапчика М.П. - М.: Academia, 2017. - 608 с.

References

1. Bakhvalov, M.S. Numerical methods: Textbook / M.S. Bakhvalov, M.P. Zhidkov, H.M. Kobelkov. - M.: Bynom. LZ, 2011. - 636 с.
2. Dyakonov V.P. Matlab and Simulink for radio engineers. - M.: "DMK-Press", 2011. -976 p.
3. Zaliznyak, V.E. Numerical Methods. Basics of scientific calculations: Textbook and practical for academic bachelor's degree / V.E. Railwayman - Lyubertsy: Yuright, 2016. - 356 с.
4. Numerical methods / Ed. Lapchyka M.P. - M.: Academia, 2017. - 608 p.