DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-48-09
УДК 681.518:62-50
Димова Ганна Олегівна, к.т.н., доцент,
https://orcid.org/0000-0002-5294-1756
Херсонський державний аграрно-економічний університет, м. Херсон, Україна

ПОБУДОВА МОДЕЛІ «ВХІД – ПРОСТІР СТАНІВ – ВИХІД» НА ОСНОВІ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ГАНКЕЛЕВИХ МАТРИЦЬ

Димова Г.О. Побудова моделі «вхід – простір станів – вихід» на основі властивостей лінійних операторів з використанням ганкелевих матриць. Статтю присвячено розв'язанню задачі аналізу структури динамічного об'єкту: з урахуванням стохастичного підходу до аналізу вихідних сигналів та без урахування випадкових складових вихідного сигналу на підставі лінійних відображень множини лінійних просторів, тобто теоретико-множинний підхід.

Поставлена задача знаходження структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом досліджувалася методом факторизації кореляційної матриці вихідного сигналу [1]. Розглянутий раніш метод і методи, що розглянуті в цій роботі, відносяться до обернених задач дослідження динамічних систем, сутність яких заключається в тому, що вихідний спостережуваний сигнал являється рішенням динамічного оператора об'єкта, а структура самого оператора не відома. При цьому є деякі припущення про його клас: лінійний диференціальний, нелінійний диференціальний і диференціальний в частинних похідних та інші.

Евристичний підхід ґрунтується на тому, що вхідний сигнал діє на об'єкт, при цьому здійснюється збір інформації про всі ступені свободи динамічного некерованого об'єкта. Таким вхідним сигналом, що має нескінчений спектр, є білий шум. В статті розглядається методика знаходження структури оператора і оцінка його параметрів для лінійного випадку та метод побудови моделі «вхід – простір станів – вихід» багатомірної динамічної системи. Послідовність побудови моделі оператора лінійної динамічної системи як розв'язання оберненої задачі динаміки – по вихідному сигналу визначити структуру оператора в просторі станів, дозволить розробляти інформаційні технології для реальних динамічних систем в лінійному наближенні.
Ключові слова: лінійний оператор, проекційний оператор, ганкелева матриця, ранг матриці, головні мінори, динамічна система.

Dymova H. Building an "input - state space - output" model based on the properties of linear operators using Hankel matrices. The article is devoted to solving the problem of analyzing the structure of a dynamic object: taking into account the stochastic approach to the analysis of output signals and without taking into account the random components of the output signal based on linear mappings of a set of linear spaces, that is, the set-theoretic approach.

The stated problem of finding the structure of a dynamic object from the output signal was studied by the method of factorization of the correlation matrix of the output signal [1]. The method considered earlier and the methods considered in this work refer to inverse problems of studying dynamical systems, the essence of which is that the original observed signal is a solution to the dynamic operator of the object, and the structure of the operator itself is unknown. At the same time, there are some assumptions about its class: linear differential, nonlinear differential and differential in partial derivatives, and others.

The heuristic approach is based on the fact that the input signal acts on the object, while collecting information about all degrees of freedom of the dynamic uncontrolled object. Such an input signal, which has an infinite spectrum, is white noise. The article considers a method for finding the structure of an operator and estimating its parameters for the linear case and a method for constructing an "input - state space - output" model of a multidimensional dynamical system. The sequence of constructing a model of the operator of a linear dynamic system as a solution to the inverse problem of dynamics - to determine the structure of the operator in the state space from the output signal, will allow developing information technologies for real dynamic systems in a linear approximation.
Keywords: linear operator, projection operator, Hankel matrix, matrix rank, principal minors, dynamical system.

Постановка проблеми. Основною метою роботи є розв'язання задачі ідентифікації для визначення структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом, структури його оператора на основі структурних властивостей лінійних операторів та упорядкування множини вихідних сигналів безперервного технологічного процеса.

Для досягнення поставленої мети необхідно створити метод знаходження структури оператора динамічного об'єкта і упорядкування множини вихідних сигналів з представленням їх у виді ганкелевих форм та матриць. Метод моделювання оператора динамічної системи на основі властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм і матриць дозволить розв'язувати обернені задачі динаміки на теоретико-множинному рівні в математично точній і погодженій постановці, тобто до оптимальної точної моделі (без урахування перешкод), а саме до найбільш сильної неспростованої моделі в класі лінійних систем.

Аналіз досліджень. Методика знаходження структури оператора і оцінки його параметрів для лінійного випадку розглядалась на прикладі сигналу $\boldsymbol{y}_o(t)$ виходу автономного об'єкта, який описується звичайним диференціальним рівнянням m-го порядку з постійними коефіцієнтами і стійкою точкою спокою $\boldsymbol{y}_o = 0$ [2]:

$$\frac{d^m \boldsymbol{y}_o(t)}{dt^m} + \sum_{m=0}^{m-1} a_m \frac{d^m \boldsymbol{y}_o(t)}{dt^m} = 0$$

і початковими умовами:

$$\left\{\frac{d^m \boldsymbol{y}_o(0)}{dt^m}\right\}, \quad m = 0,1,2,\ldots,m-1.$$

Характеристичний поліном для диференціального рівняння, що розглядається, $a_m r^m + a_{m-1} r^{m-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$, де r_i – корені рівняння. Рівняння характеристичного поліному відображає структуру лінійного оператора і встановлює взаємозв’язок між множиною коренів r_i та вектором коефіцієнтів $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ [3, 4]. Оцінка структури моделі динамічного оператора для лінійного випадку зводиться до оцінки структури його характеристичного полінома, використовуючи метод Лобачевського-Греффе [5] (або методи Данилевського О.М., Крилова О.М., Леверьє-Фаддеєва, метод обертань [6])

З використанням ізоморфності моделей операторів на основі лінійних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами та регресійних різницевих рівнянь, знайдених методом найменших квадратів, отримують системи нормальних рівнянь для визначення коефіцієнтів характеристичного полінома.

При виконанні вимог умов Гауса-Маркова та перевірки часових рядів на наявність (та усунення) грубих помилок в часових згладжених рядах різниць отримують задовільні оцінки коефіцієнтів моделі структури динамічного об’єкту, що не регулюється, за його вихідними сигналами.

Розрахунок коренів характеристичного поліному на основі метода Лобачевського-Греффе дозволяє оцінити стійкість моделі структури динамічного об’єкту [5].

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів. Модель «вхід – простір станів – вихід» базується на основних властивостях лінійних операторів [4].

Дві матриці **A** та **B**, зв’язані співвідношенням $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, де **T** – деяка неособлива матриця, називаються подібними. Таким чином, дві матриці, відповідні одному оператору в лінійному просторі **R** при різних базисах подібні між собою, причому матриця **T**, що зв’язує ці матриці, збігається з матрицею перетворення координат при переході від першого базису до другого. Іншими словами, лінійному оператору в **R** відповідає цілий клас подібних між собою матриць; ці матриці представляють даний оператор в різних базисах. Дві подібні матриці мають завжди рівні визначники, тобто

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{T}|^{-1}|\mathbf{A}||\mathbf{T}| = |\mathbf{A}|. \quad (1)$$

Рівність $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ є необхідною, але не достатньою умовою подібності.

Для того щоб дві матриці $\mathbf{A} = ||a_{ik}||_1^n$ та $\boldsymbol{B} = ||b_{ik}||_1^n$ були подібні ($\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$), необхідно і достатньо, щоб вони мали одні й ті ж інваріантні поліноми, або одні і ті ж елементарні дільники в числовому полі K [7, 8].

Нехай матриця $\mathbf{A} = (\lambda)$ (λ – корінь характеристичного поліному, має ранг *r*, оскільки в цій матриці нерівні тотожні нулю мінори *r*-го порядку, в тій час як всі мінори порядку більшого ніж *r* дорівнюють нулю тотожно щодо λ. Позначимо через $D_j(\lambda)$ найбільший спільний дільник всіх мінорів *j*-го порядку матриці $\mathbf{A} = (\lambda)$ $(j = 1,2,\ldots,r)$. Тоді в ряду

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \ldots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) = 1, \quad (2)$$

кожен поліном ділиться без залишку на наступний. Відповідні частки позначимо як $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$:

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \dots, i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda). \quad (3)$$

Поліноми $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_r(\lambda)$ називаються інваріантними поліномами прямокутної матриці $\mathbf{A} = (\lambda)$ [7, 9].

Для подальших доказів розглянемо деякі приватні типи лінійних операторів в **R**: оператор **J** в **R** називається інволютивним, якщо $\mathbf{J}^2 = \mathbf{E}$ (де **E** – одинична матриця). Інволютивному оператору в будь-якому базисі відповідає інволютивна матриця **J**. Інволютивний оператор неособливий, тобто $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$.

Оператор **P** в **R** є проекційним, якщо $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Нехай дано довільне розщеплення простору **R** на два підпростори **S** та **T**: **R** = **S** + **T**. Тоді для будь-якого вектора $\vec{x} \in \mathbf{R}$ має місце розкладання $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_T$, де $\vec{x}_S \in \boldsymbol{S}$, $\vec{x}_T \in \boldsymbol{T}$ [7].

Вектор $\vec{x}_S$ являється проекцією вектора $\vec{x}$ на підпростір **S** паралельно підпростору **T**. Аналогічно вектор $\vec{x}_T$ – проекція вектора $\vec{x}$ на підпростір **T** паралельно підпростору **S**.

Розглянемо оператор **P**, що здійснює проектування простору **R** на підпростір **S** паралельно підпростору **T**, тобто оператор в **R** визначається рівністю $\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}_S$ для будь-якого вектора $\vec{x} \in \boldsymbol{R}$. Очевидно цей оператор є лінійним, але він є проективним, оскільки $\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}_S$, $\mathbf{P}^2\vec{x} = \mathbf{P}\vec{x}_S$ і, отже, $(\mathbf{P}^2 - \mathbf{P})\vec{x} = \vec{x}_S - \vec{x}_S = 0$, тобто $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Можна перевірити і зворотне твердження. Довільний проекційний оператор **P** в **R** здійснює проектування всього простору **R** на підпростір $\boldsymbol{S} = \mathbf{P}\boldsymbol{R}$ паралельно підпростору $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{R}$. Будь-яка натуральна ступінь проекційного оператора є проекційним оператором. Якщо **P** – проекційний оператор, то **E** – **P** – проекційний оператор, оскільки

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{P})^2 = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{P}. \quad (4)$$

Квадратна матриця **P** буде проекційною, якщо $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Очевидно, в довільному базисі проекційному оператору відповідає проекційна матриця. Для знаходження оператора динамічної системи на основі експериментальних даних (у вигляді векторних часових рядів, отриманих в результаті обробки вихідних сигналів досліджуваної системи) зробимо їх упорядкування в вигляді ганкелевих квадратичних форм і відповідних їм ганкелевих матриць.

Для отримання моделі, що має вигляд «вхід – простір станів – вихід» (моделі з пам'яттю), розглянемо розкладність матричного оператора в моделі простору станів (**A**, **B**, **C**, **D**). Тут **A** – матриця коефіцієнтів системи, **B** – матриця управління, **C** – матриця виходу, **D** – матриця обходу (встановлює безпосередню залежність вихідних даних системи від вхідних змінних) [10].

Нехай в результаті обробки вихідних сигналів отримані $2n$–1 чисел (або векторів в разі багатомірного вихідного сигналу динамічної системи) $s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}$. Складемо симетричну ганкелеву матрицю $\boldsymbol{S} = ||s_{i+k}||_0^{n-1}$, в розгорнутому вигляді вона має вид:

$$\boldsymbol{S} = \left\| \begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{matrix} \right\|. \quad (5)$$

Послідовні головні мінори матриці **S** будемо позначати $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \dots, \boldsymbol{D}_n$:

$$\boldsymbol{D}_p = |s_{i+k}|_0^{n-1}.$$

Основні результати Фробеніуса [7] відносно рангу ганкелевих дійсних матриць: якщо в ганкелевій матриці $\boldsymbol{S} = ||s_{i+k}||_0^{n-1}$ перші *h* рядків лінійно залежні, то $\boldsymbol{D}_h \neq 0$.

Матриця, що складається з перших *h* рядків $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_h$ матриці **S**

$$\left\|\begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\square-1} & s_{\square} & s_{\square+1} & \dots & s_{\square+n-2} \end{matrix}\right\| \tag{6}$$

має ранг h. З іншого боку, будь-який стовпець цієї матриці виражається лінійно через h попередніх стовпців, але тоді, оскільки ранг матриці (6) дорівнює h, ці перші h стовпців матриці (6) повинні бути лінійно незалежні, тобто $\boldsymbol{D}_{\square} \neq 0$.

Для розгляду питання розкладеності ганкелевих матриць з метою зручності доказу їх розкладеності і отримання на цій основі представлення моделі в просторі станів (**A**, **B**, **C**, **D**) позначимо елементи прямокутної матриці (6) як a_{ik} з двома індексами, де i – нумерація за рядками, k – нумерація за стовпцями, тобто перейдемо від матриці **S** до співпадаючої за розмірністю матриці $\mathbf{A} = ||a_{ik}||_1^n$ (i = 1, 2, …, m; k = 1, 2, …, n). Виходячи з алгоритмів обробки вихідних сигналів динамічного об'єкта значення елементів матриць (5) та (6) будуть невід'ємними $a_{ik} \geq 0$ або позитивними $a_{ik} > 0$.

Матриця $\mathbf{A} = ||a_{ik}||_1^n$ буде розкладеною, якщо вона може бути приведена до вигляду

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left\|\begin{matrix} \boldsymbol{B} & 0 \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{matrix}\right\|, \tag{7}$$

де **B** та **D** – квадратні матриці [7, 8].

Це можливо тоді і тільки тоді, коли можливе деяке розбиття всіх її індексів 1, 2, …, n на дві додаткові системи (без загальних індексів) $i_1, i_2, \dots, i_\mu$; $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ ($\mu + \nu = n$) $a_{i_\alpha k_\beta} = 0$ (α = 1, 2, …, μ; β = = 1, 2, …, ν). В іншому випадку матриця **A** буде нерозкладеною. Під перестановкою рядів в квадратній матриці $\mathbf{A} = ||a_{ik}||_1^n$ розуміється з'єднання перестановок рядків з такою ж перестановкою стовпців матриці **A**.

Нехай матриця $\mathbf{A} = ||a_{ik}||_1^n$ відповідає лінійному оператору в n-мірному векторному просторі **R** (n векторів виходу динамічної системи) з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Перестановка рядів відповідає перенумерації базисних векторів, тобто переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ до нового базису
$\vec{e}_1^{\,'} = \vec{e}_{j1}, \vec{e}_2^{\,'} = \vec{e}_{j2}, \dots, \vec{e}_n^{\,'} = \vec{e}_{jn}$, де ($j1$, $j2$, …, jn) деяка перестановка індексів 1, 2, …, n. При цьому матриця **A** переходить в подібну їй матрицю $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ (в кожному рядку і кожному стовпці перетворюючої матриці **T** один елемент дорівнює одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю) [8].

Під ν-мірним координатним підпростором в **R** будемо розуміти будь-який підпростір в **R** з базисом $\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \dots, \vec{e}_{k_\nu}$ ($1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\nu \leq n$). З кожним базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ простору **R** зв'язано C_n^ν ν-мірних координатних підпросторів. C_n^ν – біноміальний коефіцієнт: $C_n^\nu = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$. Тоді матриця $\mathbf{A} = ||a_{ik}||_1^n$ розкладена в тому і тільки в тому випадку, якщо відповідний цій матриці оператор **A** має ν-мірний інваріантний координатний підпростір з $\nu < n$. Звідси випливає, що, якщо **A** розкладена матриця, то перестановкою рядів вона може бути представлена у виді (7), і, якщо
|**A**| ≥ 0 і в характеристичному визначнику

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & r - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

будь-який з головних мінорів дорівнює нулю (матриця А розкладена), тоді перетворюється в нуль будь-який "охоплюючий" головний мінор і, зокрема, один з головних мінорів (n – 1)-го порядку $\mathbf{B}_{11}(\lambda)$, $\mathbf{B}_{22}(\lambda)$, …, $\mathbf{B}_{nn}(\lambda)$ [7, 10].

Матриця |**A**| ≥ 0 є розкладеною в тому і тільки в тому випадку, коли в одному з співвідношень $\mathbf{B}_{ii}(r)$ (i = 1, 2, …, n) є знак рівності.

На цьому обґрунтуванні будемо будувати модель динамічної системи, яка повинна відповідати таким вимогам:

- бути простою;
- містити мало довільних або уточнюючих елементів;
- узгоджуватися з усіма існуючими спостереженнями і пояснювати їх в рамках теорії лінійних динамічних систем;
- давати детальний передбачення результатів майбутніх спостережень, які можуть спростувати цю модель або довести її хибність, якщо передбачення, зроблені за цією моделлю, не підтверджуються.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. Пропонований метод моделювання оператора динамічної системи на основі властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм і ганкелевих матриць дозволяє обговорювати рішення зворотних задач динаміки на теоретико-множинному рівні в математично точній і погодженій постановці. Це призводить до поняття оптимальної точної моделі (без урахування перешкод), а саме до найбільш сильної неспростованої моделі в класі лінійних систем. Така модель пояснює спостереження і мала наскільки можливо.

Проілюстрована послідовність побудови моделі оператора лінійної динамічної системи як розв’язання оберненої задачі динаміки: по вихідному сигналу визначити структуру оператора в просторі станів дозволяє розробляти обчислювальні алгоритми для реальних динамічних систем в лінійному наближенні.

Список бібліографічного опису

1. Марасанов В.В., Забытовская О.И., Дымова А.О. (2012) Прогнозирование структуры динамических систем. Вестник ХНТУ № 1 (44), С. 292-302.
2. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. (1997) Математическое моделирование макроэкономических процессов. Кишинев: Эврика. 313 с.
3. Димова Г.О. (2018) Метод знаходження моделі динамічного об’єкта за вихідним сигналом. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах: Матеріали XVIII Міжнар. наук.-техн. конференції (8-13 червня 2018 р., м.Одеса); Одес. нац. акад. зв’язку ім. О.С.Попова. Одеса–Хмельницький: ХНУ. С. 202-204.
4. Неймарк М.А. (1969) Линейные дифференциальные операторы. Москва: Наука. 526 с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. (1966) Основы вычислительной математики. Москва: Наука. 664 с.
6. Виллемс Ян К. (1989) От временного ряда к линейной системе. Теория систем. Математические методы и моделирование. Сборник статей. Москва: Мир. 384 с.
7. Гантмахер Ф.Р. (2004) Теория матриц. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 560 с.
8. Ланкастер П. (1978) Теория матриц. Москва: Наука. 280 с.
9. Беллман Р. (1969) Введение в теорию матриц. Москва: Наука. 368 с.
10. Дымова А. О. (2019) Проекционные методы описания структуры оператора линейных динамических систем. Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. Випуск 6/2019 (119). С. 152-160.

References

1. Marasanov V.V., Zabytovskaya O.I., Dymova A.O. (2012) Forecasting the structure of dynamical systems. Vestnik KhNTU No. 1 (44), Pp. 292-302.
2. Gametsky A.F., Solomon D.I. (1997) Mathematical modeling of macroeconomic processes. Chisinau: Eureka. 313 p.
3. Dymova H.O. (2018) A method for finding a model of a dynamic object from an output signal. Measuring and computing equipment in technological processes: Materials XVIII International. science and technology conference (June 8-13, 2018, Odessa); Odessa national Acad. communication named after O.S.Popova. Odesa–Khmelnytskyi: KhNU. Pp. 202-204.
4. Neimark M.A. (1969) Linear differential operators. Moscow: Nauka. 526 p.
5. Demidovich B.P., Maron I.A. (1966) Fundamentals of Computational Mathematics. Moscow: Nauka. 664 p.
6. Willems Jan K. (1989) From time series to linear system. Theory of systems. Mathematical methods and modeling. Digest of articles. Moscow: Mir. 384 p.
7. Gantmakher F.R. (2004) Matrix theory. Moscow: FIZMATLIT. 560 p.
8. Lancaster P. (1978) Matrix Theory. Moscow: Nauka. 280 p.
9. Bellman R. (1969) An introduction to matrix theory. Moscow: Nauka. 368 p.
10. Dymova A. O. (2019) Projection methods for describing the structure of an operator of linear dynamical systems. Visnyk KrNU named after Mikhail Ostrogradsky. Issue 6/2019 (119). Pp. 152-160.