DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-47-08
УДК 519.6
Брагінець Оксана Вікторівна, к.ф.-м.н., доцент
https://orcid.org/0000-0003-2635-7203
Воробйова Алла Іванівна, к.ф.-м.н., доцент
https://orcid.org/0000-0001-5994-8187
Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, м. Миколаїв, Україна

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР ПРЯМИМИ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ.

Брагінець О.В., Воробйова А.І. Використання математичного пакету Maple до розв’язання СЛАР прямими чисельними методами. В роботі розглянуто застосування математичного пакету Maple до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь прямими чисельними методами, таким як методи: Гаусса, LU-факторизації, Холецького, відбиття та прогонки.
Ключові слова: системи лінійних алгебраїчних рівнянь, чисельні методи, прямі методи, Maple.

Brahinets O.V., Vorobyova A.I. Using the mathematical program Maple to solve systems of linear algebraic equations by direct numerical methods. The paper considers the application of mathematical program Maple to solving systems of linear algebraic equations by direct numerical methods, such as Gaussian elimination, LU-factorization, Choletsky, QR decomposition, tridiagonal matrix algorithm.
Keywords: systems of linear algebraic equations, numerical methods, direct methods, Maple.

Постановка проблеми та аналіз досліджень.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) невеликої розмірності, та аналітичні, точні методи їх розв’язання, що добре вивчається в курсі вищої математики, не викликають проблем у студентів комп’ютерного факультету, але завжди виникають питання щодо наближених методів розв’язання та розв’язку СЛАР високої розмірності. Моделювання реальних систем і процесів зазвичай включає складні, великомасштабні математичні проблеми, які можуть не мати аналітичних рішень. Отже, мотивація вивчення способів знаходження наближеного розв’язку та застосування чисельних методів у студентів-комп'ютерників є доволі високою. Особливо приваблює можливість застосування потужних комп’ютерних засобів та математичних пакетів у поєднанні з чисельними методами для вирішення таких задач.

Відомі математичні пакети Maple, MatLab, MathCad, R, Mathematica, за допомогою яких можна ефективно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь прямими чисельними методами та проводити попередні розрахунки з подальшою реалізацією вже в проєктований комп'ютерній системі. В навчальному посібнику [1] проаналізовані ці пакети та розглядається вивчення чисельних методів з використання пакета R.

При вивченні чисельних методів студентами комп’ютерних спеціальностей доцільним є застосування математичного пакета Maple, оскільки він володіє потужною мовою програмування та має у своєму арсеналі понад трьох тисяч різних функцій, що дозволяє розв’язати майже будь-яку задачу як в аналітичному, так і в чисельному вигляді. Основи роботи в середовищі цього пакета та використання його до вивчення вищої математики можна знайти в [2-4].

Maple має потужну довідкову систему з сотнями прикладів, тому може широко використовуватися при вирішенні різноманітних завдань, починаючи від студента і закінчуючи науковими співробітниками.

Велика кількість прикладних задач зводиться до необхідності розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Це одна з найпоширеніших задач обчислювальної математики. Опис методів (аналітичних та чисельних) розв’язання СЛАР можна знайти в багатьох посібниках (див., наприклад [1, 5, 6]).

Метою роботи є показати застосування математичного пакета Maple до розв’язання СЛАР прямими чисельними методами таким, як метод Гаусса, Холецького, прогонки, LU-факторизації, відбиття.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{ij} \in R^1, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$; $b_i \in R^1, i = \overline{1,n}$ – задані числа; $x_j \in R^1, j = \overline{1,n}$ – невідомі.

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

де A – матриця розмірності $n \times n$; B – вектор-стовпець розмірності n ($B \in R^n$); X – вектор-стовпець розмірності n ($X \in R^n$), то систему (1) можна записати в матричному вигляді:

$$AX = B. \tag{2}$$

Чисельні методи розв'язання СЛАР (1) діляться на прямі та ітераційні. В цій статті розглядаються прямі методи.

Метод Гаусса. Метод виключення невідомих, або метод Гаусса є найбільш відомим з класичних точних методів розв'язання СЛАР. Він складається з двох етапів, які умовно називають прямим та зворотним ходом. Прямий хід полягає в послідовному виключенні невідомих, що перетворює систему рівнянь (1) в систему рівнянь з трикутною матрицею. З трикутної основної матриці системи обчислюємо значення невідомих $x_j \in R^1, j = \overline{1,n}$, починаючи з x_n. В цьому суть зворотного ходу метода Гаусса. Розглянемо реалізацію цього метода в Maple.

Нехай треба розв'язати СЛАР, задану наступними матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} -27 & -93 & -74 & -45 & 67 \\ 59 & 79 & -66 & 45 & -90 \\ 73 & -82 & -1 & 9 & -79 \\ -39 & 91 & -95 & 80 & 52 \\ -23 & -64 & -10 & 61 & -33 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 43 \\ 84 \\ -7 \\ 38 \\ 59 \end{pmatrix}.$$

Спочатку підключаємо пакет **LinearAlgebra** та вводимо наші дані

```
> with(LinearAlgebra) :
  A := Matrix(5, 5, [[-27,-93,-74,-45, 67], [59, 79,-66, 45,-90], [73,-82,-1, 9,-79], [
     -39, 91,-95, 80, 52], [-23,-64,-10, 61,-33]]);
  B := Vector([43, 84,-7, 38, 59]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -27 & -93 & -74 & -45 & 67 \\ 59 & 79 & -66 & 45 & -90 \\ 73 & -82 & -1 & 9 & -79 \\ -39 & 91 & -95 & 80 & 52 \\ -23 & -64 & -10 & 61 & -33 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 43 \\ 84 \\ -7 \\ 38 \\ 59 \end{bmatrix}$$

Прямий хід метода Гаусса виконується за допомогою команди GaussianElimination (зведення розширеної матриці системи до трикутного вигляду):

```
> G := GaussianElimination(⟨A|B⟩, 'method' = 'FractionFree');
```

$$G := \begin{bmatrix} -27 & -93 & -74 & -45 & 67 & 43 \\ 0 & 3354 & 6148 & 1440 & -1523 & -4805 \\ 0 & 0 & 1375614 & 102276 & -165231 & -1235745 \\ 0 & 0 & 0 & 107409906 & 12873207 & -84821967 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9778693377 & 14883107409 \end{bmatrix}$$

Зворотний хід (команда BackwardSubstitute) видає шуканий вектор-стовпець X:

```
> BackwardSubstitute(G) : X := evalf(%);
```

$$X := \begin{bmatrix} -1.641864746 \\ 0.03599665338 \\ -1.035984110 \\ -0.6072906356 \\ -1.521993464 \end{bmatrix}$$

Метод Гаусса-Жордана. В методі Гаусса-Жордана при виконанні прямого ходу, проводимо виключення невідомих до тих пір поки в кожному рядку та стовпчику основної матриці системи, не залишиться тільки один ненульовий елемент, або зводимо основну матрицю СЛАР зводимо до діагонального вигляду з одиницями на діагоналі, при цьому розв'язок системи виявляється на місці вектора B. Зрозуміло з логічної точки зору кращою модифікацією методу Гаусса є саме метод Гаусса-Жордана.

В Maple цей метод реалізується командами ReducedRowEchelonForm та BackwardSubstitute:

> $sol1 := ReducedRowEchelonForm(\langle A|B \rangle);\ BackwardSubstitute(sol1) : X := evalf(\%);$

$$sol1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5351763974}{3259564459} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{117333412}{3259564459} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3376856984}{3259564459} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1979502972}{3259564459} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4961035803}{3259564459} \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -1.641864746 \\ 0.03599665338 \\ -1.035984110 \\ -0.6072906356 \\ -1.521993464 \end{bmatrix}$$

Метод LU-факторизації. Розглянемо метод LU-факторизації, який ще називають LU-розкладанням або LU-декомпозицією. Суть цього метода полягає в представленні матриці A у вигляді добутку двох матриць L та U, які є відповідно нижньою (лівою) та верхньою (правою) трикутними матрицями. Тоді систему (2) можна записати еквівалентним матричним рівнянням

$$LUX = B. \tag{3}$$

Вводимо вектор допоміжних змінних $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n)^T$ тоді рівняння (3) можна переписати у матричному вигляді

$$\begin{cases} LY = B, \\ UX = Y. \end{cases} \tag{4}$$

Таким чином, для розв’язання системи (1) необхідно послідовно розв’язати дві системи СЛАР з трикутними матрицями коефіцієнтів.

Розв’яжемо задану систему методом LU-факторизації в Maple. Спочатку знайдемо матриці L та U, для цього використаємо команду LUDecomposition.

> $LUDecomposition(A) : p, L, U := evalf(\%);$

$$p, L, U := \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -2.185185185 & 1. & 0. & 0. & 0. \\ -2.703703704 & 2.684257603 & 1. & 0. & 0. \\ 1.444444444 & -1.813953488 & -0.9780897839 & 1. & 0. \\ 0.8518518519 & -0.1225402504 & 0.06128172583 & 1.164542533 & 1. \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -27. & -93. & -74. & -45. & 67. \\ 0. & -124.2222222 & -227.7037037 & -53.33333333 & 56.40740741 \\ 0. & 0. & 410.1413238 & 30.49373882 & -49.26386404 \\ 0. & 0. & 0. & 78.08142837 & 9.358153523 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -91.04088944 \end{bmatrix}$$

Тут p – матриця перестановок. Розв'язуємо систему (4):

> $Y := LinearSolve(L, B);$

$$Y := \begin{bmatrix} 43. \\ 177.962962955000 \\ -368.439177092366 \\ -61.6611688075291 \\ 138.563638757197 \end{bmatrix}$$

> $X := LinearSolve(U, Y);$

$$X := \begin{bmatrix} -1.64186474667955 \\ 0.0359966533068327 \\ -1.03598410964787 \\ -0.607290636106666 \\ -1.52199346479932 \end{bmatrix}$$

Метод відбиття. Наступний прямий метод розв'язування СЛАР, який розглянемо буде метод відбиття. Він полягає в представленні матриці A у вигляді добутку $A = QR$, де Q – ортогональна, а R – права трикутна матриці. Тоді система (2) перепишеться у вигляді

$$QRX = B. \tag{5}$$

Аналогічно до метода LU-факторизації вводимо вектор допоміжних змінних $Y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)^T$. Тоді рівняння (5) можна переписати у вигляді системи матричних рівняння

$$\begin{cases} QY = B, \\ RX = Y. \end{cases} \tag{6}$$

Розв'яжемо задану систему методом відбиття в Maple. Спочатку знайдемо матриці Q та R, для цього використаємо команду QRDecomposition.

> $QRDecomposition(A) : Q, R := evalf(\%);$

$Q, R :=$
$[[-0.2508076522, -0.5162098653, -0.6535946332, -0.4787280232, -0.1194002996],$
$[0.5480611658, 0.4535554091, -0.4606051086, -0.01500880812, -0.5305978882],$
$[0.6781095780, -0.4147424788, -0.2049210559, 0.2427957650, 0.5169271262],$
$[-0.3622777197, 0.4778003140, -0.5480115684, 0.2976890728, 0.5015239285],$
$[-0.2136509629, -0.3570859867, -0.1354535751, 0.7893197376, -0.4306617527]]$

$$, \begin{bmatrix} 107.6522178 & -8.276652521 & 18.26251275 & 0.03715668921 & -131.4882339 \\ 0. & 184.1806098 & -33.14055445 & 56.34853498 & -6.011938087 \\ 0. & 0. & 132.3864958 & -45.26335443 & -10.17425082 \\ 0. & 0. & 0. & 95.01615639 & -60.47256982 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 39.20782901 \end{bmatrix}$$

Розв'язуємо систему (6):

> $Y := LinearSolve(Q, B);$

$$Y := \begin{bmatrix} 4.13368168142591 \\ 15.8931662165102 \\ -94.1771515033388 \\ 34.3364340264163 \\ -59.6740594931782 \end{bmatrix}$$

> $X := LinearSolve(R, Y);$

$$X := \begin{bmatrix} -1.64186474564924 \\ 0.0359966532740371 \\ -1.03598411000932 \\ -0.607290635475252 \\ -1.52199346405939 \end{bmatrix}$$

Метод Холецького (метод квадратних коренів). Розв'язування диференціальних рівнянь методом скінченних елементів при чисельному розв'язуванні зводиться до лінійної системи рівнянь, основна матриця якої симетрична. Таким чином, виникає потреба розв'язувати СЛАР з основною симетричною матрицею.

Для розв'язання таких систем застосовується метод Холецького, або метод квадратних коренів. Симетричну матрицю A розкладають у добуток $U^T U$, де U – верхня (права) трикутна матриця

При наявності $U^T U$-розкладання розв'язання симетричної системи вигляду (1) зводиться до послідовного розв'язання двох трикутних систем

$$U^T Y = B \quad \text{та} \quad UX = Y. \tag{7}$$

Розглянемо симетричну систему з наступними матрицями (одразу пропишемо їх в Maple):

> $restar : with(LinearAlgebra) :$
$A := Matrix(4, 4, [[688, -245, -382, 56], [-245, 652, 382, 235], [-382, 382, 705, 96], [56, 235, 96, 611]]);$
$B := Vector([-324, 79, 671, 553]);$

$$A := \begin{bmatrix} 688 & -245 & -382 & 56 \\ -245 & 652 & 382 & 235 \\ -382 & 382 & 705 & 96 \\ 56 & 235 & 96 & 611 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -324 \\ 79 \\ 671 \\ 553 \end{bmatrix}$$

Знаходимо матрицю U, використовуючи вже відому нам команду LUDecomposition, тільки вказуємо, що цей розклад треба зробити за методом Холецького (Cholesky):

```
> LUDecomposition(A, method = 'Cholesky', output = 'U') : U := evalf(%);
```

$$U := \begin{bmatrix} 26.22975410 & -9.340537435 & -14.56361347 & 2.134979984 \\ 0. & 23.76456102 & 10.35020268 & 10.72781695 \\ 0. & 0. & 19.64114220 & 0.8175666829 \\ 0. & 0. & 0. & 22.15146471 \end{bmatrix}$$

Транспонуємо матрицю U та розв’язуємо послідовно дві трикутні системи (7):

```
> U_T := Transpose(U);
```

$$U\_T := \begin{bmatrix} 26.22975410 & 0. & 0. & 0. \\ -9.340537435 & 23.76456102 & 0. & 0. \\ -14.56361347 & 10.35020268 & 19.64114220 & 0. \\ 2.134979984 & 10.72781695 & 0.8175666829 & 22.15146471 \end{bmatrix}$$

```
> Y := LinearSolve(U_T, B);
```

$$Y := \begin{bmatrix} -12.3523841956261 \\ -1.53076284304739 \\ 25.8105334028139 \\ 25.9437473743647 \end{bmatrix}$$

```
> X := LinearSolve(U, Y);
```

$$X := \begin{bmatrix} -0.271155695565728 \\ -1.14421767796297 \\ 1.26535416452793 \\ 1.17119782885746 \end{bmatrix}$$

Метод прогонки. При розв’язуванні практичних задач часто виникає необхідність розв’язування систем рівнянь, які містять велику кількість нульових елементів в основній матриці. Зазвичай ці матриці мають так звану стрічкову структуру, де ненульові елементи розташовані на головній діагоналі та на кількох сусідніх бічних діагоналях.

Розглянемо найпростіший випадок стрічкових систем, які часто зустрічаються, наприклад, у задачах математичної фізики. А саме, ми будемо шукати розв’язок такої системи, кожне рівняння якої з’єднує три «сусідні» невідомі:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i, \tag{8}$$

де $i = \overline{1,n}$; $b_1 = 0$, $d_n = 0$.

Рівняння вигляду (8) називають триточковими різницевими рівняннями другого порядку, а система таких рівнянь має тридіагональну структуру. Намагаючись позбавитись від ненульових елементів в піддіагональній частині матриці системи, припускають, що існують такі набори чисел δ_i та λ_i $(i = \overline{1,n})$, при яких має місце рівність

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i, \tag{9}$$

тобто триточкове рівняння другого порядку (8) перетворюється в двоточкове рівняння першого порядку (9). Після нескладних перетворень у рівності (9) та (8) отримуємо, що:

$$\delta_i = -\frac{d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}}, \qquad \lambda_i = \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}} \tag{10}$$

при всіх $i = \overline{1,n}$.

Такий спосіб розв’язання рівнянь виду (9) називається методом прогонки, який зводиться до знаходження прогоночних коефіцієнтів δ_i та λ_i за формулами (10) та отримання невідомих x_i за формулою (9), причому зазначимо, що при $i = \overline{1,n}$ процес знаходження розв’язків називають прямою прогонкою, а при $i = n, \ldots, 2, 1$ зворотною прогонкою. Зрозуміло, що метод прогонки реалізується після виконання кількості операцій, яка пропорційна n.

Для успішного застосування методу прогону необхідно, щоб у процесі розрахунку не виникало ситуацій з діленням на нуль, а при великих розмірах систем не було швидкого зростання помилок округлення. Тобто прогонка є коректною, якщо знаменник прогоночних коефіцієнтів (10) не набуває нульового значення, та стійкою, якщо $|\delta_i| < 1$ при всіх $i = \overline{1, n}$.

Розглянемо як метод прогонки можна реалізувати в Maple.

```
> restart : with(LinearAlgebra) : A := Matrix(5) :
  A[1, 1] := 949 : A[1, 2] := 134 :
  A[1, 3], A[1, 4], A[1, 5],
  A[2, 4], A[2, 5],
  A[3, 1], A[3, 5],
  A[4, 1], A[4, 2],
  A[5, 1], A[5, 2], A[5, 3] := 0$12 :
  A[2, 1] := 53 : A[2, 2] := 994 : A[2, 3] := 15 :
  A[3, 2] := −24 : A[3, 3] := −339 : A[3, 4] := −3 :
  A[4, 3] := 332 : A[4, 4] := −858 : A[4, 5] := −373 :
  A[5, 4] := 41 : A[5, 5] := −128 :
  A;
```

$$\begin{bmatrix} 949 & 134 & 0 & 0 & 0 \\ 53 & 994 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -339 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 332 & -858 & -373 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & -128 \end{bmatrix}$$

```
> B := Vector(5) :
  B[1] := −144 :
  B[2] := 933 : B[3] := 240 : B[4] := 391 : B[5] := 441 :
  B;
```

$$\begin{bmatrix} -144 \\ 933 \\ 240 \\ 391 \\ 441 \end{bmatrix}$$

Знайдемо коефіцієнти триточкових різницевих рівнянь (8):

```
> n := 5 : b[1] := 0;  for i from 2 to n do b[i] := A[i, i − 1]; end do
```

$$b_1 := 0$$

$$b_2 := 53$$

$$b_3 := -24$$

$$b_4 := 332$$

$$b_5 := 41$$

```
> for i from 1 to n do c[i] := A[i, i]; r[i] := B[i]; end do
```

$$c_1 := 949$$

$$r_1 := -144$$

$$c_2 := 994$$

$$r_2 := 933$$

$$c_3 := -339$$

$$r_3 := 240$$

$$c_4 := -858$$

$$r_4 := 391$$

$$c_5 := -128$$

$$r_5 := 441$$

> $d[n] := 0$; **for** i **from** 1 **to** $n-1$ **do** $d[i] := A[i, i+1]$; **end do**

$$d_5 := 0$$

$$d_1 := 134$$

$$d_2 := 15$$

$$d_3 := -3$$

$$d_4 := -373$$

Прогоночні коефіцієнти (пряма прогонка):

>
$\delta[1] := evalf\left(-\frac{d[1]}{c[1]}\right)$;
$\lambda[1] := evalf\left(\frac{r[1]}{c[1]}\right)$;
for i **from** 2 **to** n **do**
$\delta[i] := -\frac{d[i]}{c[i] + b[i]\cdot\delta[i-1]}$;
$\lambda[i] := \frac{r[i] - b[i]\cdot\lambda[i-1]}{c[i] + b[i]\cdot\delta[i-1]}$;
end do

$$\delta_1 := -0.1412012645$$

$$\lambda_1 := -0.1517386723$$

$$\delta_2 := -0.01520501942$$

$$\lambda_2 := 0.9539042772$$

$$\delta_3 := -0.008859093997$$

$$\lambda_3 := -0.7763333409$$

$$\delta_4 := -0.4332467672$$

$$\lambda_4 := -0.7535272499$$

$$\delta_5 := 0.$$

$$\lambda_5 := -3.237407551$$

Зворотна прогонка (обернений хід):

>
$X := Vector(5)$:
$X[n] := \lambda[n]$;
for i **from** $n-1$ **by** -1 **to** 1 **do**
$X[i] := \delta[i]\cdot X[i+1] + \lambda[i]$;
end do

$$X_5 := -3.237407551$$

$$X_4 := 0.6490691061$$

$$X_3 := -0.7820835051$$

$$X_2 := 0.9657958721$$

$$X_1 := -0.2881102707$$

Виводимо на екран відповідь:

> X;

$$\begin{bmatrix} -0.2881102707 \\ 0.9657958721 \\ -0.7820835051 \\ 0.6490691061 \\ -3.237407551 \end{bmatrix}$$

Перевірка:

> $Multiply(A, X) = B$;

$$\begin{bmatrix} -144.000000032900 \\ 932.999999943800 \\ 239.999999980200 \\ 390.999999796000 \\ 440.999999878100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144 \\ 933 \\ 240 \\ 391 \\ 441 \end{bmatrix}$$

Завдяки чітким алгоритмам прямих методів розв'язання СЛАР студентам пропонується написати програми будь-якою мовою програмування, наприклад на С++, та провести аналіз програмної реалізації з розв'язанням в середовищі Maple.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. В статті були розглянуті основні прямі чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, до вирішення яких приводить багато прикладних задач. До кожного методу надано короткий алгоритм та показано як вони реалізуються в системі комп'ютерної математики Maple. Надалі планується продовжити серію статей, які будуть присвячені вивченню інших розділів курсу «Чисельні методи» з використанням Maple.

Список бібліографічного опису

1.Задачин В.М., Конюшенко І.Г. (2014) Чисельні методи: навчальний посібник. Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 180 с.
2.Нікітенко О.М. (2014) Maple: Розв'язання інженерних та наукових задач: Навч. посібник. Харків: ХНУРЕ, 289 с.
3.Михалевич В.М. (2004) Навчально-контролюючий Maple – комплекс з вищої математики. Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія, № 1, С. 74–78.
4.Воробйова А.І., Курікша О.В. (2009) Симетрійний аналіз диференціальних рівнянь у частинних похідних за допомогою математичного пакету Maple. Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили. Сер.: Комп'ютерні технології, 106, вип. 93, С. 75-79.
5.Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. (2020) Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник. Львів: Видавництво «Новий світ – 2000», 470 с.
6.Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. (2020) Чисельні методи: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 322 с.

References

1.Zadachyn V.M., Konyushenko I.H. (2014). Numerical methods: a training manual. Kharkiv: Vyd. KHNUE im. S. Kuznetsya, 180 p.
2.Nikitenko O.M. (2014). Maple: Solving engineering and scientific problems: a training manual. Kharkiv: NURE, 289 p.
3.Mykhalevych, V. M. (2004). Educational and control Maple – a complex of higher mathematics. Information technology and computer engineering, No 1, pp. 74-78.
4.Vorobyova A.I., Kuriksha O.V. (2009) Symmetric analysis of partial differential equations using the Maple mathematical package. Scientific works of the Petro Mohyla Black Sea State University. Ser .: Computer Technologies, 106, vol. 93, pp. 75-79.
5.Andrunyk V.A., Vysotska V.A., Pasichnyk V.V., Chyrun L.B., Chyrun L.V. (2020). Numerical Methods in Computer Science: Textbook - Lviv: Vydavnytstvo «Novyy svit – 2000», 470 p.
6.Volontyr L.O., Zelinska O.V., Potapova N.A., Chikov I.A. (2020). Numerical methods: Textbook. - Vinnytsya: VNAU, 322 p.