

DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-45-04>

УДК 602.1:519.85:53.082.9:616-07

<sup>1</sup>Марценюк Василь Петрович, д.т.н., професор,<https://orcid.org/0000-0001-5622-1038><sup>2</sup>Сверстюк Андрій Степанович, д.т.н., професор,<https://orcid.org/0000-0001-8644-0776><sup>3</sup>Козодій Наталія Василівна, аспірант,<https://orcid.org/0000-0002-9096-4393><sup>3</sup>Кареліна Олена Володимирівна, к. пед.н., доцент,<https://orcid.org/0000-0002-5628-9048><sup>3</sup>Загородна Наталія Володимирівна, к.т.н., доцент,<https://orcid.org/0000-0002-1808-835X>Університет Бельсько-Бяли, Польща<sup>1</sup>Тернопільський національний медичний університет імені І.Я. Горбачевського, Україна<sup>2</sup>Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна<sup>3</sup>

## ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЦІ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Марценюк В.П., Сверстюк А.С., Козодій Н.В., Кареліна О.В., Загородна Н.В. **Огляд математичних моделей в економіці на основі диференціальних рівнянь.** У роботі розглянуто математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь, які використовуються в економіці, враховуючи такі важливі економічні фактори, як аналіз бізнес-циклів, темпи зростання економіки через заощадження, виробництво, приріст капіталу, зростання робочої сили, попит, пропозицію, заощадження та прибуток. Приклади застосування диференціальних рівнянь в економіці представлені у вигляді наступних математичних моделей: Харрода-Домара, економічного зростання Солоу, моделі поколінь, що перекриваються (модель Самуельсона-Даймонда), Рамсея-Касса-Купманса, економічного зростання Ромера, Калдора, Філіпса. За результатами аналітичного огляду математичних моделей встановлено, що модель Харрода-Домара використовується для аналізу бізнес-циклів, а також, як інструмент для пояснення темпів зростання економіки через заощадження та продуктивність капіталу. Модель Солоу враховує вплив таких факторів, як запас капіталу, зростання населення та технологічного прогресу, дію більшої кількості чинників, повніше відображає картину економічного зростання порівняно з моделлю Харрода-Домара. У моделі Фрідмана-Фелпса розглянуто питання споживання, яке пов'язане з одиницями праці в стані рівноваги при якому граничний обсяг виробництва на одного робітника повинен дорівнювати темпам зростання робочої сили при максимальному споживанні на одного індивідуума. У моделі Рамсі-Касса-Купманса враховано споживання у певний момент часу та пояснюється довгострокове економічне зростання, а не коливання бізнес-циклу, і не включає недосконалість ринку, неоднорідність серед домашніх господарств чи екзогенні критичні ситуації. За результатами аналізу моделі Ромера встановлено, що довготривале зростання капіталу залежить від екзогенних параметрів, включаючи темпи зростання населення. Дослідження зворотного зв'язку між інфляцією та безробіттям для досягнення економічної стабільності враховано в моделі Філіпса.

**Ключові слова:** математична модель, диференціальні рівняння, економічні процеси, економічне зростання, неокласичні моделі

Марценюк В.П., Сверстюк А.С., Козодій Н.В., Кареліна О.В., Загородная Н.В. **Обзор математических моделей в экономике на основе дифференциальных уравнений.** В работе рассмотрены математические модели в виде дифференциальных уравнений, используемых в экономике, учитывая такие важные экономические факторы, как анализ бизнес-циклов, темпы роста экономики через сбережения, производство, прирост капитала, рост рабочей силы, спрос, предложение, сбережения и прибыль. Примеры применения дифференциальных уравнений в экономике представлены в виде следующих математических моделей: Харрода-Домара, экономического роста Солоу, модели перекрывающихся поколений (модель Самуэльсона-Даймонда), Рамсея-Касса-Купманса, экономического роста Ромера, Калдора, Филиппа. По результатам аналитического обзора математических моделей установлено, что модель Харрода-Домара используется для анализа бизнес-циклов, а также как инструмент для объяснения темпов роста экономики через сбережения и производительность капитала. Модель Солоу учитывает влияние таких факторов как запас капитала, рост населения и технологического прогресса, действие большего количества факторов, полнее отражает картину экономического роста по сравнению с моделью Харрода-Домара. В модели Фридмана-Фелпса рассмотрен вопрос потребления, связанный с единицами труда в состоянии равновесия при котором предельный объем производства на одного рабочего должен равняться темпам роста рабочей силы при максимальном потреблении на одного индивидума. В модели Рамси-Касса-Купманса учтено потребление в определенный момент времени и объясняется долгосрочный экономический рост, а не колебания бизнес-цикла и не включает несовершенство рынка, неоднородность среди домашних хозяйств или экзогенные критические ситуации. По результатам анализа модели Ромера установлено, что продолжительный рост капитала зависит от экзогенных параметров, включая темпы роста населения. Исследование обратной связи между инфляцией и безработицей для достижения экономической стабильности учтено модели Филиппа.

**Ключевые слова:** математическая модель, дифференциальные уравнения, экономические процессы, экономический рост, неоклассические модели.

Martseniuk V.P., Sverstiuk A.S., Kozodii N.V., Karelina O.V., Zagorodna N.V. **Review of mathematical models in economics based on differential equations.** Mathematical models in the form of differential equations used in economics are considered, taking into account such important economic factors as business cycle analysis, economic growth through savings, production, capital growth, labor growth, demand, supply, savings and profits. Examples of the application of differential equations

in economics are presented in the form of the following mathematical models: Harrod-Domar, Solow economic growth, models of overlapping generations (Samuelson-Diamond model), Ramsey-Cass-Kupmans, economic growth of Romer, Kaldor, Phillips. According to the results of the analytical review of mathematical models, it was found that the Harrod-Domar model is used to analyze business cycles, as well as a tool to explain the growth rate of the economy through savings and productivity of capital. The Solow model takes into account the influence of factors such as capital stock, population growth and technological progress, the action of more factors, more fully reflects the picture of economic growth compared to the Domar-Harrod model. The Friedman-Phelps model addresses the issue of consumption, which is related to units of work in equilibrium in which the marginal volume of production per worker should be equal to the growth rate of labor at maximum consumption per individual. The Ramsey-Cass-Kupmans model takes into account consumption at a given point in time and explains long-term economic growth rather than fluctuations in the business cycle, and does not include market imperfections, household heterogeneity or exogenous critical situations. The analysis of Romer's model shows that long-term capital growth depends on exogenous parameters, including population growth. The study of the feedback between inflation and unemployment to achieve economic stability is taken into account in the Phillips model.

**Keywords:** mathematical model, differential equations, economic processes, economic growth, neoclassical models

**Вступ.** Протягом останніх років спостерігаємо ефективне застосування диференціальних рівнянь при моделюванні досліджуваних явищ та процесів у різних галузях науки таких як медицина, біологія, хімія, фізика, економіка. Диференціальні рівняння, як математичні моделі, широко використовуються у природничих та соціально-економічних наукових дослідженнях і є фундаментальними для розуміння складних кіберфізичних систем [1].

У зв'язку із стрімким розвитком інформаційних технологій теорія диференціальних рівнянь стала важливим інструментом економічного аналізу. Зокрема, математичні моделі економічних процесів у вигляді звичайних диференціальних рівнянь активно використовуються для моделювання економічного зростання, валового внутрішнього продукту, споживання, доходу та інвестицій. Для моделювання динаміки цін на активи та варіанти ціноутворення у фінансовій математиці незамінними є стохастичні диференціальні рівняння.

При моделюванні економічних процесів переважно використовуються звичайні диференціальні рівняння та різницеві рівняння. За результатами аналітичного огляду диференціальні рівняння із запізненням використовуються в економіці дуже рідко, в порівнянні із використанням їх для кіберфізичних систем медико-біологічних процесів.

Зважаючи на те, що економічні фактори та параметри вимірюються в дискретних одиницях часу, то різницеві рівняння є більш природним вибором моделювання економічних процесів, але вони можуть спричиняти значні ускладнення в їх асимптотичній поведінці, і тому їх складніше проаналізувати. Диференціальні рівняння можуть бути більш ефективними для аналізу асимптотичної стійкості. Диференціальні рівняння в частинних похідних, зазвичай другого порядку, для функцій принаймні двох змінних виникають у сучасній макроекономіці на основі розв'язку оптимізаційної задачі, сформульованої в стохастичних умовах з використанням теорії оптимального керування.

**Постановка наукової проблеми.** Зважаючи на велике різноманіття математичних моделей економічних процесів та усіх факторів, які враховують моделі економічних процесів на основі диференціальних рівнянь необхідно провести їх аналітичний огляд та порівняльний аналіз, для того, щоб виділити ті, які будуть більш ефективними для моделювання економічного зростання, валового внутрішнього продукту, споживання, доходу та інвестицій, і можуть використовуватися для реалізації з кіберфізичними системами.

**Аналіз досліджень.** Протягом ХХ століття спостерігаємо значні досягнення у розвитку економічних математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Серед них слід зазначити модель зростання Солоу, яка ґрунтується на роботах Харрода та Домара з неокласичної теорії зростання. В основі неокласичної теорії зростання покладено економічне зростання, яке зумовлено трьома ключовими елементами: праця, капітал і технології. Роботи Асемоглу [2] підтверджують важливість теми економічного зростання, а модель зростання Солоу є одією із базових в економіці через її простоту та важливість. Економічна модель Даймонда-Самуельсона на основі диференціального рівняння враховує такі важливі чинники, як попит та пропозицію. Класична теорія керування зворотним зв'язком вперше застосована у економічній моделі Філіпса з метою керування економічним розвитком. Інші роботи є диференціальними рівняннями із часовим запізненням для виробництва та накопиченню капіталу. Розглянемо основні економічні математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь.

## **1. Економічні математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь.**

### **1.1. Модель Харрода-Домара.**

У роботі [3] розглянуто модель Харрода-Домара для аналізу бізнес-циклів. Також її використовувували, як інструмент для пояснення темпів зростання економіки через заощадження та продуктивність капіталу.

Дана модель реалізує взаємозв'язок між ставкою інвестицій на рік та рівнем потоку доходів, які виражаються, через функцію капіталу  $Y$  ( $K, Y = F(K)$ ), гранична продуктивність,  $\frac{dY}{dK} = c$  ( $c$  – константа). Модель враховує зміну темпу зростання продуктивності

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = sc - \delta \quad (1)$$

$$Y(t) = Y_0 e^{(sc-\delta)t} \quad (2)$$

У формулах (1)-(2)  $s$  – норма заощаджень, а  $\delta$  – норма амортизації капіталу.

Константа  $s$  зберігається для використання у складі капіталу; заощадження вважаються інвестиціями. Рівняння (1) передбачає, що зростання економіки визначається темпами, за допомогою яких здійснюються інвестиції, де наперед задано величину константи  $s$ , яка визначає частину інвестицій, що йде на зростання економіки. Рівняння показує, скільки інвестицій веде до зростання економіки.

Дана модель чітко демонструє, що збільшення інвестицій за рахунок заощаджень і продуктивності сприяє економічному зростанню, але не враховує витрати праці та чисельність населення, але один із найбільш суттєвих недоліків моделі полягає в тому, що вона не передбачає, що державні інвестиції можуть витіснити приватні [4]. Рівновага попиту та пропозиції в цій моделі зберігається у випадку рівності всіх трьох темпів зростання – гарантованого, природного та фактичного, що є нестійким станом, оскільки будь-яке відхилення інвестицій від значення виводить систему з рівноваги, а механізмів повернення в рівноважний стан не існує.

### 1.2. Модель економічного зростання Солоу

Основою даної економічної моделі є рівняння зростання, що включає виробництво, приріст капіталу та зростання робочої сили, відсутнє в моделі Харрода-Домара [5]. Модель Солоу вважають фундаментом для всіх сучасних моделей економічного зростання, яким вона дала необхідну математичну базу для аналізу темпів зміни капіталу.

Одним із недоліків моделі є екзогенний характер норми заощаджень, тобто модель не враховує оптимізаційну поведінку споживачів, тому називається неокласичною моделю економічного зростання. Також модель приводить до нереалістичної оцінки ставки відсотка в країнах, що розвиваються [6].

Зростання капіталу в економіці  $K$ , є еквівалентним до зростанню інвестицій  $I$ , які використовуються для збільшення капіталу, що підлягає амортизації.

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + \delta K(t) \quad (3)$$

де  $\delta$  – постійна норма амортизації капіталу.

Дана модель враховує вплив таких факторів, як запас капіталу, зростання населення та технологічного прогресу, дію більшої кількості чинників, повніше відображає картину економічного зростання порівняно з моделлю Харрода-Домара.

### 1.3. Модель поколінь, що перекриваються (модель Самуельсона-Даймонда).

У 1958 року майбутній лауреат Нобелівської премії з економіки Пол Самуельсон (англ. Paul Samuelson) на основі ідей Ойген фон Бем-Баверка про причини існування відсоткового доходу на капітал опублікував відносно просту модель економіки.

В економіці діють два типи індивідів: молоді та старі. Молоді працюють і отримують дохід від праці. Старі не працюють, вони витрачають свої заощадження. Модель призначалася для аналізу, скільки заощаджень виробляється економікою, як заощадження перетворюються на інвестиції.

У 1965 році Пітер Даймонд (Peter Diamond, також майбутній лауреат Нобелівської премії з економіки) об'єднав модель Самуельсона і модель економічного зростання Солоу з урахуванням доповнень моделі Рамсея.

Пол Самуельсон, який використовував прості диференціальні рівняння для дослідження стабільності рівноваги для кількох сценаріїв попиту-пропозиція. У першому ціна зростає (зменшується), якщо надлишковий попит є позитивним (негативним), тоді як у другому кількість зростає (зменшується), якщо надлишковий попит є позитивним (негативним). В моделі відображені зміни споживчої поведінки індивіда в етапах дорослішання. Але в міру дорослішання характер споживчої поведінки змінюється. Якщо у молодому віці індивід працює і робить заощадження, то в старості він ці заощадження витрачає [7].

Нехай  $D(p, a)$  і  $S(p)$  позначають функції попиту та пропозиції ціни  $p$  із сталою зсуву  $a$ .

При рівновазі ціна  $p^*$  і кількість  $q^*$ , відповідно

$$q^* = D(p^*, a) = S(p^*) \quad (4)$$

$$\frac{\partial D}{\partial a} > 0, \frac{\partial D}{\partial p} > 0 \quad (5)$$

Завдання наукових досліджень полягає у визначенні рівноважних значень ціни, кількості та їх чутливості за параметром зсуву  $a$ .

Так само, як і в моделях Солоу і Рамсея-Касса-Купманса, науково-технічний прогрес у моделі покоління, що перетинаються, не є наслідком прийняття рішень економічними агентами, а задається екзогенно. Тому, при усіх своїх перевагах, модель не дає відповіді на питання, чому одні країни багаті, а інші – бідні, і чому другі не можуть наздогнати перших.

#### 1.4. Модель Фрідмана-Фелпса

Модель Фрідмана-Фелпса є неокласичною моделлю зростання, в якій розглянуто питання споживання, пов'язаної з одиницями праці в стані рівноваги за так званим «золотим правилом» [8]. При рівновазі з темпом зростання робочої сили  $n$ , є лише споживання на одиницю робочої сили

$$c(t) = f(k) - n(k) \quad (6)$$

Для максимального споживання на одиницю праці

$$\frac{dc}{dk} = \frac{\partial f}{\partial k} - n = 0 \quad (7)$$

Тому  $\frac{\partial^2}{\partial k^2} < 0$  точка повороту є максимумом, заданим  $\frac{\partial f}{\partial k} = n$

Згідно «золотому правилу» можна зробити висновок, що граничний обсяг виробництва на одного робітника повинен дорівнювати темпам зростання робочої сили при максимальному споживанні на душу населення.

#### 1.5. Модель Рамсея-Касса-Купманса (РКК)

Модель Рамсея-Касса-Купманса, або модель РКК, є неокласичною моделлю економічного зростання, яка відрізняється від моделі Солоу тим, що враховує споживання у певний момент часу та таким чином ендогенізує норму економії [9].

$$\frac{\partial k}{\partial t} = f(k) - (\delta + n)k - c(t) \quad (8)$$

Стійкий стан досягається при  $c(t) = f(k) - (\delta + n)k$

Існує друге рівняння моделі РКК, проблема соціального планувальника щодо максимізації функції соціального добробуту, вираженої інтегралом

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} L(t)u(c(t))dt = \int_0^{\infty} e^{(n-p)t} u(c(t))dt \quad (9)$$

де  $p > 0$  – ставка дисконтування, а  $u(c(t))$  являє собою строго зростаючу увігнуту функцію корисності споживання.

Модель Рамсея-Касса-Купманса спрямована лише на пояснення довгострокового економічного зростання, а не коливаний бізнес-циклу, і не включає жодних джерел порушень, таких як недосконалість ринку, неоднорідність серед домашніх господарств чи екзогенні шоки.

#### 1.6. Модель економічного зростання Ромера

Зростання капіталу в моделі Солоу є екзогенним, стаціонарний стан залежить від екзогенних параметрів  $g$ , які зумовлені зовнішніми тенденціями. У разі відсутності  $A(t)L(t)$  зростання неможливо зберегти. Граничний продукт капіталу

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \beta A(t)^{1-\beta} \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\beta} = \frac{\alpha \beta A(t)^{1-\beta}}{\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\beta}} \quad (10)$$

У країнах з меншим капіталом на працю граничний продукт капіталу має бути вищим, хоча така умова не виконується. Невідповідність може бути пов'язана з різними значеннями  $g$  і  $A(t)$ , які розглядаються як екзогенно заданий параметр у моделі Солоу. Тому в роботі Ромера [10] запропоновано математичну теорію ендогенного росту на основі трьох припущень. Виробнича функція,  $Y = F(K, A, L)$  пропонує збільшення віддачі від масштабу, тобто  $F(\lambda K, \lambda A, \lambda L) > \lambda F(K, A, L)$

Передбачувані масштабні ефекти теорії зростання Ромера не узгоджуються з доказами часових рядів індустріально розвиненими економіками і довгострокове зростання залежить від екзогенних параметрів, включаючи темпи зростання населення [11].

### 1.7. Модель Калдора

Представлено модель торгового циклу, що включає нелінійні функції інвестування та заощаджень, які змінюються з часом у відповідь на накопичення або декумуляцію капіталу, так що система знову переходить від стійкої рівноваги до нестійкої рівноваги з поверненням до стійкого стану [12]. У моделі Калдора: інвестиції  $I$  та заощадження  $S$  є нелінійними щодо рівня активності  $X$ , що вимірюється з точки зору зайнятості.

Калдор використовував систему диференціальних рівнянь із загальними нелінійними формами. Чисті інвестиції  $I$  та заощадження  $S$  є функціями національного доходу  $Y$  та капіталу  $K$

$$I = I(Y, K), \quad (11)$$

$$S = S(Y, K), \quad (12)$$

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \frac{\partial I}{\partial K} < 0, \frac{\partial S}{\partial Y} > 0, \frac{\partial S}{\partial K} < 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial I}{\partial K} < \frac{\partial S}{\partial K} \quad (14)$$

Також зростання капіталу визначає інвестиції

$$\frac{\partial K}{\partial t} = I(Y, K) \quad (15)$$

### 1.8. Модель Філіпса

Модель Філіпса є першою спробою застосувати класичну теорію зворотного зв'язку для того, забезпечує математичну методологію виправлення відхилень керованих змінних від їх цільових значень. Дослідження зворотного зв'язку між інфляцією та безробіттям для досягнення економічної стабільності запропонував О. Філіпс [13].

$$\frac{dY}{dt} = a(D_a - Y) \quad (16)$$

У формулі (16)  $Y$  – національний дохід, а  $D_a$  – сукупний попит для деякого коефіцієнта коригування  $a > 0$ .

Подібне диференціальне рівняння справедливо і для фактичного  $D_g$  та цільового державного попиту  $D_g^*$  з  $b > 0$ , а саме

$$\frac{dD}{dt} = b(D_g^* - D_g) \quad (17)$$

З часом американські економісти П. Семюелсон та Р. Солоу перевірили правильність моделі (17), шляхом заміни росту номінальної зарплати на темп інфляції в цілому, враховуючи статистичні дані США та підтвердили її, назвавши кривою Філіпса, згідно якої з ростом безробіття інфляція буде зменшуватись, тобто існує зворотній зв'язок [14].

### Висновки та перспективи подальших досліджень.

У роботі розглянуто математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь, які використовуються у економіці. Такі моделі дають змогу враховувати такі важливі економічні фактори, як аналіз бізнес-циклів, темпи зростання економіки через заощадження, виробництво, приріст капіталу, зростання робочої сили, попит, пропозицію, заощадження та прибуток.

Приклади застосування диференціальних рівнянь в економіці представлені у вигляді наступних математичних моделей: Харрода-Домара, економічного зростання Солоу, моделі поколінь, що перекриваються (модель Самуельсона-Даймонда), Рамсея-Касса-Купманса, економічного зростання Ромера, Калдора, Філіпса.

За результатами аналітичного огляду математичних моделей встановлено, що модель Харрода-Домара використовується для аналізу бізнес-циклів, а також, як інструмент для пояснення темпів зростання економіки через заощадження та продуктивність капіталу. Не зважаючи на фундаментальність моделі Солоу для всіх сучасних моделей економічного зростання, вона має недолік, оскільки не враховує оптимізаційну поведінку споживачів. Дана модель враховує вплив таких факторів, як запас капіталу, зростання населення та технологічного прогресу, дію більшої кількості чинників, повніше відображає картину економічного зростання порівняно з моделлю Домара-Харрода.

В моделях Солоу і Рамсея-Касса-Купманса, науково-технічний прогрес у моделі поколінь, що перетинаються, не є наслідком прийняття рішень економічними агентами, а задається екзогенно. Модель Фрідмана-Фелпса є неокласичною моделлю зростання, в якій розглянуто питання споживання, ке пов'язане з одиницями праці в стані рівноваги за так званим «золотим правилом», за яким можна зробити висновок, що граничний обсяг виробництва на одного робітника повинен дорівнювати темпам зростання робочої сили при максимальному споживанні на одного індивідуума.

Модель Рамсі-Касса-Купманса є неокласичною моделлю економічного зростання, яка відрізняється від моделі Солоу тим, що враховує споживання у певний момент часу та спрямована лише на пояснення довгострокового економічного зростання, а не коливань бізнес-циклу, і не включає недосконалість ринку, неоднорідність серед домашніх господарств чи екзогенні критичні ситуації. Передбачувані масштабні ефекти теорії зростання Ромера не узгоджуються з доказами часових рядів індустріально розвиненими економіками, при цьому довгострокове зростання залежить від екзогенних параметрів, включаючи темпи зростання населення. Представлено модель торгового циклу, що включає нелінійні функції інвестування та заощаджень, які змінюються з часом у відповідь на накопичення або декумуляцію капіталу, так що система знову переходить від стійкої рівноваги до нестійкої рівноваги з поверненням до стійкого стану. У моделі Філіпса застосовано теорію зворотного зв'язку для того, щоб забезпечити математичну методологію виправлення відхилень керованих змінних від їх цільових значень.

За результатами аналізу моделі Ромера встановлено, що довготривале зростання капіталу залежить від екзогенних параметрів, включаючи темпи зростання населення. Дослідження зворотного зв'язку між інфляцією та безробіттям для досягнення економічної стабільності враховано в моделі Філіпса.

У подальших дослідженнях необхідно запропонувати економічну математичну модель у вигляді диференціальних рівнянь із запізненням, яка б основні економічні фактори: аналіз бізнес-циклів, темпи зростання економіки, зростання робочої сили, попит, пропозицію, заощадження та прибутки.

#### References.

1. Martsenyuk V.P., Sverstiuk A.S., Klos-Witkowska A., Bagriy-Zayats O.A. Numerical Simulation of Cyber-physical Biosensor Systems on the Basis of Lattice Difference Eqations. *Advances in Cyber-physical Systems*. 2019. Vol. 4. No. 2. P. 55–70.
2. Acemoglu D. D. Economic Growth and Development in the Undergraduate Curriculum, *The Journal of Economic Education*, 2013;44:2:169-177, <https://doi.org/10.1080/00220485.2013.770344>.
3. Le Ngoc Thong, Nguyen Thi Hao, The Harrod – Domar Growth Model and its Implications for Economic Development in Vietnam, *International Journal of Humanities Social Sciences and Education (IJHSSE)* Volume 6, Issue 4, pp. 11-17, 2019.
4. George R. Zodrow, John W. Diamond, Chapter 11 - Dynamic Overlapping Generations Computable General Equilibrium Models and the Analysis of Tax Policy: The Diamond-Zodrow Model, Editor(s): Peter B. Dixon, Dale W. Jorgenson, *Handbook of Computable General Equilibrium Modeling*, Elsevier, Volume 1, 2013, Pages 743-813, ISSN 2211-6885, ISBN 9780444595683, <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-59568-3.00011-0>.
5. Rodrigo Munguía, Jessica Davalos, Sarquis Urzua, Estimation of the Solow-Cobb-Douglas economic growth model with a Kalman filter: An observability-based approach, *Heliyon*, Volume 5, Issue 6, 2019.
6. Vadim Kufenko, Klaus Prettnner, Vincent Geloso, Divergence, convergence, and the history-augmented Solow model, *Structural Change and Economic Dynamics*, Volume 53, 2020, Pages 62-76, ISSN 0954-349X, <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2019.12.008>.
7. Xiaodong Cui, Ching-Ter Chang, How life expectancy affects welfare in a Diamond-type overlapping generations model, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 555, 2020, 124616, ISSN 03784371, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124616>.
8. Mihály Dombi, The golden rule of material stock accumulation, *Environmental Development*, 2021, 100638, ISSN 2211-4645, <https://doi.org/10.1016/j.envdev.2021.100638>.
9. Yuhki Hosoya, Identification and testable implications of the Ramsey-Cass-Koopmans model, *Journal of Mathematical Economics*, Volume 50, 2014, Pages 63-68, ISSN 0304-4068, <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2013.12.001>.
10. Federico Etro, The Romer model with monopolistic competition and general technologies, *Economics Letters*, Volume 181, 2019, Pages 1-6, ISSN 0165-1765, <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2019.04.027>.
11. R. Zhao, Technology and economic growth: From Robert Solow to Paul Romer, *Hum Behav & Emerg Tech*. 2019; 1:62–65, <https://doi.org/10.1002/hbe2.116>.
12. Carballo, T., & Silva, A. Stability analysis of a delay differential Kaldor's model with government policies. *Mathematica Scandinavica*, 126 (1), 2020, Pages 117–141. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-116243>.
13. S.J. Turnovsky, Stabilization theory and policy: 50 years after the Phillips curve, *Economica*, 78, 2011, Pages 67–78.
14. Sayyed Abdolmajid Jalae, Mehrdad Lashkary, Amin GhasemiNejad, The Phillips curve in Iran: econometric versus artificial neural networks, *Heliyon*, Volume 5, Issue 8, 2019, e02344, ISSN 2405-8440, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02344>.