DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-43-17
УДК 004.415.3
Пех Петро Антонович, к.т.н., доцент
https://orcid.org/0000-0002-6327-3319
Войтко Володимир, студент
Луцький національний технічний університет

ПРОГРАМНО-ДЕМОНСТРАЦІЙНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗАСОБАМИ MATLAB

Пех П. А., Войтко В. М. Програмно-демонстраційний комплекс для наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь засобами Matlab. В статті запропоновано комплекс програм мовою Matlab для наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь. Програмно реалізовані графічний метод визначення значень початкових наближень коренів, методи Ньютона та ітерацій уточнення коренів. Наведено код програми розв'язування систем нелінійних рівнянь методом Ньютона.
Ключові слова: Matlab, система нелінійних рівнянь, метод Ньютона, метод ітерацій, наближені обчислення

Пех П. А., Войтко В. М. Программно-демонстрационный комплекс для приближенного решения систем нелинейных уравнений средствами Matlab. В статье предложен комплекс программ на языке Matlab для приближенного решения нелинейных уравнений. Программно реализованы аналитический и графический методы отделения корней уравнений, методы хорд, касательных, половинного деления и итераций уточнения корней. Приведены код программы метода хорд.
Ключевые слова: нелинейные уравнения, метод хорд, метод касательных, метод половинного деления, метод итераций.

Pekh Petro, Voitko Volodymyr. Software-demonstration complex for approximate solution of systems of nonlinear equations by means of Matlab. The article offers a complex of programs in the Matlab language for the approximate solution of nonlinear equations. Analytical and graphical methods for separating the roots of equations, methods of chords, tangents, half divisions and iterations of root refinement are implemented in software. The code of the program of the chord method is given.
Keywords: Matlab, system of nonlinear equations, Newton's method, iteration method, approximate calculations

Постановка задачі. Наближене розв'язування систем нелінійних рівнянь передбачає [1,3-6]. по-перше, графачного визначення початкових наближень коренів системи рівнянь, і, по-друге, уточнення грубих значень коренів системи рівнянь до заданої точності. З цією метою використовують низку методів, серед яких – методи Ньютона, ітерацій та інші.

Завдання нашого дослідження було розроблення, відлагодження та тестування комплексу програм для автоматизації процесу наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Мета дослідження полягає у розробленні мовою Matlab програмно–демонстраційного комплексу для вирішення задачі наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Новизна дослідження полягає у вирішенні задачі наближеного розв'язування систем нелінійних рівнянь за допомогою Matlab [2].

Основна частина. Нами розроблено комплекс, який складається з програм: графічного визначення грубих значень коренів системи нелінійних рівнянь з допомогою функції `plot()` `Graph_Plot`; графічного відокремлення коренів системи нелінійних рівнянь з допомогою функції ez`plot()` `Graph_Ezplot`; обчислення із заданою точністю коренів системи нелінійних рівнянь методом ітерацій `Iteration_Meth`; обчислення із заданою точністю коренів системи нелінійних рівнянь методом Ньютона `Newton_Meth`.

Програми комплексу розроблялися на базі трьох систем нелінійних рівнянь. Зокрема, перша система має вигляд

$$\begin{cases} sin(x-0.5)-y=1.6; \\ 2x-cos2y=0.1. \end{cases} \tag{1}$$

друга система має вигляд

$$\begin{cases} y-e^{x}=-1; \\ x-e^{-y}=0.1. \end{cases} \tag{2}$$

третя система має вигляд

$$\begin{cases} \sin(2x-y)-1.2x=0.4; \\ 0.8x^2-1.5y^2=1. \end{cases} \tag{3}$$

Кожна з цих систем нелінійних рівнянь були розв'язані як з використанням програми `Graph_Plot`, розробленої на базі функції `plot()` (рис. 1), так із використанням програми `Graph_Ezplot`, розробленої на базі функції ez`plot()` (рис. 2).

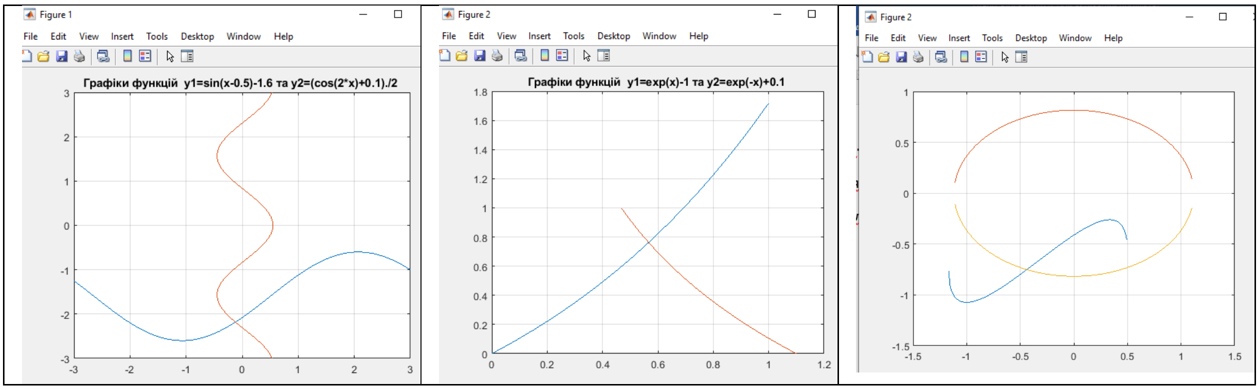

Рисунок 1 – Графічне розв'язування систем двох нелінійних рівнянь (1-3) за допомогою функції `plot()`

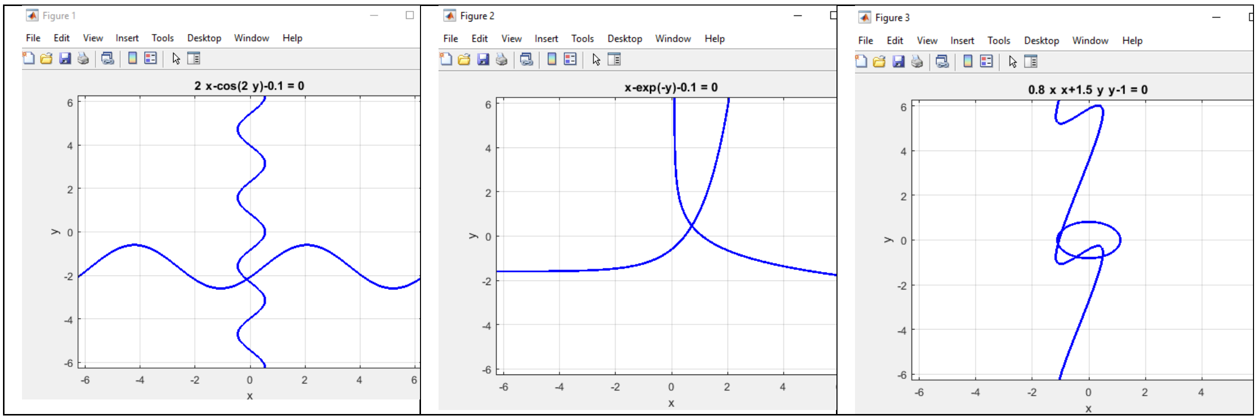

Рисунок 2 – Графічне розв'язування систем двох нелінійних рівнянь (1-3) за допомогою функції `ezplot()`

В результаті графічного розв'язування систем нелінійних рівнянь були визначені грубі наближення коренів кожної з них. Зокрема для системи (1) він має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = -0.2; \\ y_0 = -2.2. \end{cases} \tag{4}$$

для системи (2) він має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = 0.55; \\ y_0 = 0.75. \end{cases} \tag{5}$$

для системи (3) він має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = -0.4; \\ y_0 = -0.7. \end{cases} \tag{6}$$

Далі були розроблені програми для уточнення коренів системи нелінійних рівнянь. Код програми уточнення коренів двох систем нелінійних рівнянь методом Ньютона наведено на рис. 3. Стрічки з 1 по 88 забезпечують розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} sin(2x - y) - 1.2x = 0.4; \\ 0.8x^2 - 1.5y^2 = 1, \end{cases}$ а стрічки з 89 по 140 – розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} sin(x - 0.5) - y = 1.6; \\ 2x - cos2y = 0.1, \end{cases}$

Метод Ньютона для системи двох нелінійних рівнянь може бути записаний у такому вигляді:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{\Delta X_k}{J_k}; \\ y_{k+1} = x_k + \frac{\Delta Y_k}{J_k};; \\ x_0 = a;\ \ y_0 = b; \\ k = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{7}$$

Знаходимо необхідні величини, що входять у формулу (7), для першої системи нелінійних рівнянь.

$$f(x,y) = sin(2x - y) - 1.2x - 0.4;$$
$$g(x,y) = 0.8x^2 + 1.5y^2 - 1.$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\,cos(2x - y) - 1.2\,;$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\,cos(2x - y)\,;$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1.6x;$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 3y;$$
$$J = (2\,cos(2x - y) - 1.2) * (3y) - (1.6x) * (-\,cos(2x - y));$$
$$\Delta X = -\big((sin(2x - y) - 1.2x - 0.4) * (3y) - (0.8x^2 + 1.5y^2 - 1) * (-\,cos(2x - y))\big);$$
$$\Delta Y = -\big((2\,cos(2x - y) - 1.2) * (0.8x^2 + 1.5y^2 - 1) - (1.6x) * (sin(2x - y) - 1.2x - 0.4)\big).$$

Уточнення розв'язку першої системи методом Ньютона виконується операторами, записаними у стр стрічках з 1 по 88. Результати розрахунків наведені у табл. 1. Розв'язок першої системи рівнянь методом Ньютона має вигляд $\mathrm{x}_3 = -0.43906;\ \ \mathrm{y}_{35} = -0.75090$. Перевірка цих значень підстановкою їх у кожне з рівнянь системи дала такий результат: $\mathrm{f}(\mathrm{x_k}, \mathrm{y_k}) = \mathrm{f}(-0.43906, -0.75090) = 7 * 10^{-13};\ \ \mathrm{g}(\mathrm{x_k}, \mathrm{y_k}) = \mathrm{g}(-0.43906, -0.75090) = 2 * 10^{-11}$.

Таблиця 1 – Результати уточнення коренів першої системи нелінійних рівнянь за методом Ньютона

k	xk	yk
0	-0,40000	-0,70000
1	-0,44123	-0,75267
2	-0,43906	-0,75091
3	-0,43906	-0,75090

Знаходимо необхідні величини, що входять у формулу (7), для другої системи нелінійних рівнянь.

$$f(x,y) = \sin(x - 0.5) - y - 1.6;$$
$$g(x,y) = 2x - cos2y - 0.1.$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos(x - 0.5)\,;$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -1;$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2;$$
$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 2sin2y;$$
$$J = (\cos(x - 0.5)) * (2sin2y) - (2) * (-1);$$
$$\Delta X = -\big((\sin(x - 0.5) - y - 1.6) * (2sin2y) - (2x - cos2y - 0.1) * (-1\big));$$
$$\Delta Y = -\big((\cos(x - 0.5)) * (2x - cos2y - 0.1) - (2) * (\sin(x - 0.5) - y - 1.6)\big).$$

Результати розрахунків уточнення кореня другої системи нелінійних рівнянь наведені у табл. 2. Розв'язок другої системи рівнянь має вигляд $x_3 = -0.12091;\ \ y_{35} = -2.18177$. Перевірка цих значень підстановкою їх у кожне з рівнянь системи дала такий результат: $f(x_k, y_k) = f(-0.12091, -2.18177) = 3 * 10^{-15};\ \ g(x_k, y_k) = g(-0.12091, -2.18177) = 1 * 10^{-13}$.

```
function Newton_Meth
% Завдання 1. Дано систему нелінійних рівнянь:
% sin(2x-y)-1.2x=0.4;
% 0.8x^2+1.5y^2=1
% Розвязати цю (першу) систему методом Ньютона.
% Етап 1. Визначення початкових наближень коренів
% системи нелінійних рівнянь графічним методом
X=[];
Y1=[];
x=-1.4/1.2:0.01:0.6/1.2; % Вектор аргументів першої функції (вектор x)
y1=2*x-asin(1.2*x+0.4); % Обчислення значень другої функції (вектор y1)
X=[X x];
Y1=[Y1 y1];
X1=[];
Y2=[];
Y3=[];
% Вектор аргументів другої функції (вектор x1):
x1=-1/sqrt(0.8)+0.01:0.01:1/sqrt(0.8)-0.01;
y2=sqrt((1-0.8*x1.^2)/1.5); % Обчислення значень другої функції (вектор y2)
y3=-sqrt((1-0.8*x1.^2)/1.5); % Обчислення значень третьої функції
X1=[X1 x1];
Y2=[Y2 y2];
Y3=[Y3 y3];
plot(x,y1,x1,y2,x1,y3);
grid on
Z1=[X;Y1];
fm1=fopen('f1.txt','w'); % Відкриття файла fm1 для запису
fprintf(fm1,'%12.3f   %12.8f  \n',Z1); % Запис матриці Z1 у файл fm1
fclose(fm1); % Задкриття файла fm1
disp('Функція  y(x)=2*x-asin(1.2*x+0.4))');
disp('          x           y1      ');
type f1.txt % Друк вмісту текстового файла f1.txt на диску
X1=[X1 x1];
Y2=[Y2 y2];
Y3=[Y3 y3];
plot(x,y1,x1,y2,x1,y3);
grid on
Z2=[X1;Y2;Y3];
fm2=fopen('f2.txt','w'); % Відкриття файла fm2 для запису
fprintf(fm2,'%12.3f   %12.8f %12.8f \n',Z2); % Запис матриці Z2 у файл fm2
fclose(fm2); % Задкриття файла fm2
disp('Функції y2=sqrt((1-0.8*x1.^2)/1.5) та y2=-sqrt((1-0.8*x1.^2)/1.5)');
disp('      x1          y1       y2');
type f2.txt % Друк вмісту текстового файла f2.txt на диску
% Етап 2. Уточнення коренів першої системи методом Нютона.
k=0; % Поточне значення номера ітерації
xk=-0.4; % Наступне значення змінної x
yk=-0.7; % Наступне значення змінної y
epsilon=0.001; % Задана точність обчислення коренів системи
xp=0; % Попереднє значення змінної x
yp=0; % Попереднє значення змінної y
K=[k];
X1=[xk];
Y1=[yk];
while ((abs(xk-xp)>epsilon) | (abs(yk-yp)>epsilon))
    k=k+1; % Поточне значення номера ітерації
    xp=xk; % Попереднє значення змінної x
    yp=yk; % Попереднє значення змінної y
    f=sin(2*xp-yp)-1.2*xp-0.4; % Значення функції f(x,y)
    g=0.8*xp.^2+1.5*yp.^2-1; % Значення функції g(x,y)
    fx=2*cos(2*xp-yp)-1.2; % Значення частинної похідної функції f(x,y)по x
    gx=1.6*xp; % Значення частинної похідної функції g(x,y)по x
    fy=-cos(2*xp-yp); % Значення частинної похідної функції f(x,y)по y
    gy=3*yp; % Значення частинної похідної функції g(x,y)по y
    jak=fx*gy-gx*fy; % Якобіан системи рівнянь
    jax=-(f*gy-g*fy); % Перший допоміжний визначник
    jay=-(fx*g-gx*f); % Другий допоміжний визначник
    hx=jax/jak; % Приріст змінної x
    hy=jay/jak; % Приріст змінної y
    xk=xp+hx % Наступне значення змінної x
```

Рисунок 3 – Програма уточнення коренів системи нелінійних рівнянь методом Ньютона (початок)

```
    yk=yp+hy % Наступне значення змінної y
    K=[K k];
    X1=[X1 xk];
    Y1=[Y1 yk]
end
Z3=[K;X1;Y1];
fm3=fopen('f3.txt','w'); %Відкриття файла fm3 для запису
fprintf(fm3,'%12.0f   %12.8f %12.8f \n',Z3); % Запис матриці Z3 у файл fm3
fclose(fm3); % Задкриття файла fm3
disp('Уточнення розвязку першої системи нелінійних рівнянь:');
disp('       k        xk        yk');
type f3.txt % Друк вмісту текстового файла f3.txt на диску
disp('Значення функ  f=sin(2*xk-yk)-1.2*xk-0.4 та  g=0.8xk.^2+1.5*yk^2-1');
disp('після підстановки у них уточнених значень коренів системи:')
f=sin(2*xk-yk)-1.2*xk-0.4
g=0.8*xk.^2+1.5*yk^2-1
w=input('Натисніть на яку-небудь клавішу, щоб вийти з програми...');

% Завдання 2. Дано систему нелінійних рівнянь
% sin(x-0.5)-y=1.6
% 2x-cos2y=0.1
% Розв'язати цю (другу) систему нелінійних рівнянь методом Ньютона.
% Етап 1. Визначення початкових наближень коренів
% системи нелінійних рівнянь графічним методом.
X=[];
Y1=[];
x=-3:0.1:3;
y1=sin(x-0.5)-1.6; % Обчислення значень першої функції
X=[X x];
Y1=[Y1 y1];
X=[];
Y1=[];
Y2=[];
y2=(cos(2*x)-0.1)./2;  % Обчислення значень другої функції
X1=[X x];
```

Рисунок 3 – Програма уточнення коренів системи нелінійних рівнянь методом Ньютона (кінець)

Таблиця 2 – Результати уточнення коренів другої системи нелінійних рівнянь за методом Ньютона

k	xk	yk
0	-0,20000	-2,20000
1	-0,11989	-2,18295
2	-0,12091	-2,18177
3	-0,12091	-2,18177

Програма обчислення із заданою точністю коренів системи нелінійних рівнянь методом ітерацій `Iteration_Meth` розроблена аналогічно.

Висновок. В даній статті запропоновано комплекс програм мовою Matlab, за допомогою яких розв’язується задача наближеного розв’язування систем нелінійних рівнянь. Наведено код програми методу Ньютона та результати її тестування. Комплекс програм може бути як для розв’язування інженерно-технічних задач, так і в навчальних цілях.

Список бібліографічного опису.

1. Бахвалов, М.С. Чисельні методи: Підручник / М.С. Бахвалов, М.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: Біном. ЛЗ, 2011. - 636 с.
2. Дьяконов В.П. Matlab і Simulink для радіоінженерів. – М.: «ДМК-Пресс», 2011. -976 с.
3. Залізняк, В.Є. Чисельні методи. Основи наукових обчислень: Підручник і практикум для академічного бакалаврату / В.Є. Залізняк. - Люберці: Юрайт, 2016. - 356 с.
4. Чисельні методи / Під ред. Лапчика М.П. - М.: Academia, 2017. - 608 с.
5. Лабораторний практикум з програмування мовою С /С++ // навчальний посібник для студ. тех. спец. закл. вищ. освіти I-IV рівн. акредит. / Пех П.А., С.В. Лавренчук, М.В.Делявський, С.В. Гринюк. – Луцьк : Вежа-Друк, 2020. – 228 с.
6. Лабораторний практикум з дослідження операцій та математичного моделювання // навчальний посібник [для студентів техн. спец. вищ. освіти I-IV рівн. акредит.] / Пех П.А., Чернящук Н.Л., Делявський М.В., Багнюк Н.В., Кузьмич О.І. – Луцьк : Терен, 2020. – 100 с.

References.

1. Zaliznyak, V.Ye. Numerical Methods. Fundamentals of scientific calculations: Textbook and workshop for academic bachelor / V.Ye. Zaliznyak. - Люберці: Юрайт, 2016. - 356 с.
2. Numerical methods / Ed. Lapchika MP - M .: Academia, 2017. - 608 p.
3. Laboratory workshop on programming in C / C ++ // textbook for students. those. special lock higher education I-IV level. letter of credit. / Peh PA, S.V. Lavrenchuk, MV Delyavsky, SV Гринюк. - Lutsk: Vezha-Druk, 2020. - 228 p.
4. Laboratory workshop on the study of operations and mathematical modeling // textbook [for technical students. special higher education I-IV level. letter of credit.] / Pekh PA, Chernyashchuk NL, Delyavsky MV, Bagnyuk NV, Kuzmich OI - Lutsk: Teren, 2020. - 100 p.