DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-42-05
УДК 514.18
[1]**Верещага Віктор Михайлович,** д.т.н.
https://orcid.org/0000-0002-1965-1829
[2]**Адоньєв Євген Олександрович,** д.т.н.
https://orcid.org/0000-0003-1279-4138
[1]**Павленко Олександр Михайлович,** к.т.н.
https//orcid.org/0000-0002-8646-2622
[3]**Лисенко Ксенія Юріївна,** аспірантка
[1]Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького
[2]Запорізький національний університет
[3]Мелітопольська школа прикладної геометрії імені Володимира Найдиша

ГАРМОНІЗАЦІЯ ТОЧКОВИХ ПОЛІНОМІВ

Верещага В.М., Адоньєв Є.О., Павленко О.М., Лисенко К.Ю. Гармонізація точкових поліномів. Точковий поліном – це ціла раціональна функція у параметричній формі, що складається із суми добутків, у яких першими множниками кожного з доданків є базисна точка вихідної дискретно поданої лінії (ДПЛ), а другим – алгебраїчний множник, що являє собою цілий раціональний вираз, який подається у вигляді добутку різниць між параметрами відповідних вузлових точок і поточним параметром – аргументом t для проміжної точки. Точкові поліноми покладено в основу композиційної геометрії та композиційного методу геометричного моделювання. Композиційна геометрія – це геометрія, у якій кожна вихідна геометрична фігура (ГФ) розділяється на геометричну та параметричну складові і розв'язок будь-якої задачі відбувається відносно усіх базисних точок цієї ГФ,безвідносно до системи координат, в якій ці базисні точки визначені. Процес розділення ГФ на геометричну та параметричну складові названо нами – уніфікацією вихідної ГФ. Геометрична складова описується за допомоги композиційної матриці точкової – A_T, а параметрична – за допомоги композиційної матриці параметричної – $A_П$. Складові точкового поліному – доданки, являють собою добутки відповідних елементів композиційних матриць – точкової $A_T = ((A_{ij}))$ та параметричної $A_П = ((a_{ij}))$. Композиційні матриці точкові описують геометричні композиції точок для визначеної їх кількості. При цьому, геть не існую ніяких обмежень щодо координат, які ці точки визначають. Тобто, зміна або заміна будь-якої з точок геометричної композиції або, навіть, усієї композиції точок, в цілому, призведе тільки до зміни елементів композиційної матриці (КМ) точкової, і ніяк не потягне за собою зміни подальшого розв'язку. При цьому, зовсім не відбудеться змін у КМ параметричній, яка визначає взаємне розташування між елементами композиції точок, які утворюють ГФ. Окрім випадків, коли нововведені точки змінили своє розташування уздовж напрямку, у якому здійснювалася параметризація елементів вихідної ГФ. І, навіть, у цьому випадку, зміні підлягають тільки окремі елементи КМ параметричної, а подальший алгоритм розв'язку геть не стануть змін. Під композицією, взагалі, необхідно розуміти дискретний набір взаємопов'язаних елементів (часток, об'єктів, факторів, точок тощо), з яких складають цілісний об'єкт, що сприймається як ціле, має певну внутрішню єдність, при цьому, зміна або заміна будь-якого з цих елементів, у цілому, не тягне за собою ніяких змін для решти інших елементів наявної геометричної композиції. Геометрична композиція – це композиція, елементами якої є непуста скінчена множина точок, частина з яких може утворювати певну підмножину, і, при цьому, для кожного елементу цієї множини встановлено його власні розміри та розміри, що визначають їх взаємне розташування.
Ключові слова. Точкові поліноми, гармонізація, характеристичні функції, БН-координати, Б-криві.

Верещага В.М., Адоньев Е.А., Павленко А.М., Лысенко К.Ю. Гармонизация точечных полиномов. Точечный полином – это целая рациональная функция в параметрической форме, которая состоит из суммы произведений, в которых первыми множителями каждого из слагаемых является базисная точка исходной дискретно представленной линии (ДПЛ), а вторым – алгебраический множитель, который представляет собой целое рациональное выражение, которое подается в виде произведения разницы между параметрами соответствующих узловых точек и текущим параметром – аргументом t для промежуточной точки. Точечные полиномы положены в основу композиционной геометрии и композиционного метода геометрического моделирования. Композиционная геометрия – это геометрия, в которой каждая исходная геометрическая фигура (ГФ) разделяется на геометрическую и параметрическую составляющие и решение любой задачи производится относительно всех базисных точек этой ГФ, безотносительно к системе координат, в которой эти базисные точки определены. Процесс разделения ГФ на геометрическую и параметрическую составляющие назван нами – унификацией исходной ГФ. Геометрическая составляющая описывается с помощью композиционной матрицы точечной – A_T, а параметрическая – с помощью композиционной матрицы параметрической – $A_П$. Составляющие точечного полинома – слагаемые, представляют собой произведения соответствующих элементов композиционных матриц – точечной $A_T = ((A_{ij}))$ и параметрической $A_П = ((a_{ij}))$. Композиционные матрицы точечные описывают геометрические композиции точек для определенного их количества. При этом, совершенно не существует никаких ограничений относительно координат, которые эти точки определяют. То есть, изменение или замена любой из точек геометрической композиции или даже всей композиции точек, в целом, приведет только к изменению элементов композиционной матрицы (КМ) точечной, и никак не повлечет за собой изменения дальнейшего решения. При этом, совершенно не произойдет изменений в КМ параметрической, которая определяет взаимное расположение между элементами геометрической композиции точек, образующих ГФ. Кроме случаев, когда нововведенные точки изменили свое расположение вдоль направления, в котором осуществлялась параметризация элементов исходной ГФ. И даже в этом случае, изменению подлежат только отдельные элементы КМ параметрической, а дальнейший алгоритм решения и само решение совсем не подвергается изменению. Под композицией, вообще, необходимо понимать дискретный набор взаимосвязанных элементов (частей, объектов, факторов, точек и т.д.), из которых составляют целостный объект, который воспринимается как целое, имеет определенное внутреннее единство, при этом, изменение или замена любого из этих элементов, в целом, не влечет за собой никаких изменений для остальных других элементов имеющейся геометрической композиции. Геометрическая композиция - это композиция, элементами которой являются непустое конечное множество точек, часть из которых может образовывать определенное подмножество, и, при этом, для каждого элемента этого множества установлено его собственные размеры и размеры, определяющие их взаимное расположение.

Ключевые слова. Точечные полиномы, гармонизация, характерные функции, БН-координаты, Б-кривые.

Vereshchaha V., Adoniev E., Pavlenko O., Lysenko K. Harmonization of point polynomials. A point polynomial is an entire rational function in parametric form, which consists of the sum of products in which the first factors of each of the terms is the base point of the original discretely presented line (LPL), and the second is the algebraic factor, which is a whole rational expression that is served in the form of the product of the difference between the parameters of the corresponding nodal points and the current parameter - the argument t for the intermediate point. Point polynomials form the basis of compositional geometry and the compositional method of geometric modeling. Compositional geometry is a geometry in which each initial geometric figure (GF) is divided into geometric and parametric components and any problem is solved with respect to all the base points of this GF, regardless of the coordinate system in which these base points are defined. The process of dividing the GF into geometric and parametric components was called by us - the unification of the original GF. The geometric component is described using the point matrix - AT, and the parametric - using the parameter matrix - AP. The components of a point polynomial - terms, are the products of the corresponding elements of the compositional matrices - point AT = ((Aij)) and parametric AP = ((aij)). Point composite matrices describe the geometric composition of points for a certain number of points. Moreover, there are absolutely no restrictions on the coordinates that these points determine. That is, changing or replacing any of the points of the geometric composition, or even the entire composition of the points, as a whole, will only lead to a change in the elements of the composite matrix (CM) of the point, and will not entail a change in the further solution. At the same time, there will be absolutely no changes in the parametric CM, which determines the mutual arrangement between the elements of the geometric composition of the points that form the GF. Except when the newly introduced points changed their location along the direction in which the elements of the initial GF were parameterized. And even in this case, only certain elements of the parametric CM are subject to change, and the further decision algorithm and the solution itself are not subject to change at all. Under the composition, in general, it is necessary to understand a discrete set of interconnected elements (parts, objects, factors, points, etc.) that make up the whole object, which is perceived as a whole, has a certain internal unity, while changing or replacing any of of these elements, in general, does not entail any changes for the remaining other elements of the existing geometric composition. A geometric composition is a composition whose elements are a nonempty finite set of points, some of which can form a certain subset, and at the same time, for each element of this set its own sizes and dimensions that determine their relative position are established.

Keywords. Point polynomials, harmonization, characteristic functions, BN coordinates, B-curves.

Постановка наукової проблеми. Застосування точкових поліномів є основою, що забезпечую геометричний спосіб інтерполяції, який не потребує складання та розв'язання, відносно коефіцієнтів, систем лінійних рівнянь, у порівнянні із застосуванням цілих раціональних функцій. Однак, як і у цілих раціональних функцій, так і у точкових поліномів з підвищенням степеня з'являються неконтрольовані точки перегину. На наш погляд, у точкових поліномів це виникає через те, що його складові – характеристичні функції є не гармонізовані, тобто забезпечують необхідні але не достатні умови щодо інтерполяції дискретно поданої лінії (ДПЛ). Поява неконтрольованих точок перегину на лініях, що знаходяться на поверхні, яка обмежує геометричне тіло, є небажаним. Отже, виникає проблема щодо підвищення усталеності точкових поліномів, до появи небажаної осциляції, зі збільшенням їхнього степеня. Розв'язання цієї проблеми буде показано у даній статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботах [2, 3], у яких викладено основи точкового БН-числення (Балюби-Найдиша числення), було надано різні методи складання точкових рівнянь для об'єктів (геометричних фігур) різного координатного простору. У всіх запропонованих там методах, для здійснення параметризації ГФ, завжди визначався один з елементів цієї ГФ, який подавався як одиниця вимірювання для решти інших. Цей елемент обирався безвідносно до його розташування у вихідній системі координат та до його власних розмірів.

Шляхом знаходження виразів та значень відношення усіх необхідних елементів до обраного одиничного, відбувалася параметризація вихідної геометричної фігури (ГФ). Добутки кожного зі знайдених параметрів ГФ на відповідні її точки, входили до складу точкових рівнянь. Зважаючи на те, що параметризація ГФ здійснювалась на основі просто відношення зв'язаних трьох точок цієї ГФ, моделювання, у точковому БН-численні, відбувається у просторі параметрів, а результат розв'язання задачі проектується на площини проекцій, на підпростори, тощо. При цьому, таке моделювання однаково відбувається для просторів параметрів будь-якої розмірності, за умови, що цей простір параметрів є скінченим.

Оскільки параметризація, у точковому БН-численні відбувається на базі однієї ГФ для самої себе і для ГФ, що пов'язані з нею певними геометричними відношеннями, то знайдені параметри є гармонізованими і не потребують корегування.

Однак, у роботах [2, 3] відбувається параметризація, з використанням геометричних схем, для точкових кривих другого степеня. У роботі [6], з використанням геометричних схем, показано побудову точкових кривих третього степеня, на прикладі яких вбачається складність здобуття таких точкових рівнянь третього степеня.

Виходячи з розглянутого, у роботі [7] було запропоновано техніку алгебраїчного знаходження параметрів точкових рівнянь степеня > 3. Однак, і у роботі [7] алгоритми їх знаходження є недосконалими, тому у цій статті надається узагальнений алгоритм формування характеристичних функцій для точкового полінома *n*-го степеня, який забезпечує геометричний спосіб інтерполяції дискретно поданої лінії, композиція для якої утворюється *n* точками.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Виходячи із проведеного аналізу останніх досліджень і публікацій, вирізнимо частини загальної проблеми, які потребують розв'язання.

По-перше. Необхідно розробити узагальнену техніку алгебраїчного формування виразів характеристичних функцій для точкових поліномів *n*-го степеня. Однак, як з'ясувалося, спосіб алгебраїчного формування виразів характеристичних функцій забезпечує необхідні умови щодо виконання глобальної інтерполяції вихідної геометричної композиції ДПЛ точковими поліномами. В результаті виконання тільки необхідних умов на інтерполянтах *n*-о степеня виникають осциляції, які супроводжуються повою неконтрольованих точок перегину.

По-друге. Розробити спосіб проведення до взаємної відповідності між усіма алгебраїчно сформованими виразами характеристичних функцій як параметричними складовими частинами точкового полінома. Цей спосіб приведення до взаємної відповідності названо авторами – гармонізацією.

Формулювання мети дослідження. Розробити, у загальному вигляді, запис точкового поліному та його складових елементів – характеристичних функцій. Надати алгебраїчний спосіб утворення цих характеристичних функцій та надати відповідні визначення. Запропонувати спосіб гармонізації точкового поліному.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо розбіжності між многочленом і точковим поліномом.

У відповідності до [8], многочлен – це ціла раціональна функція, запис якої має вигляд:

$$y = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad (1)$$

де, a_j – сталі числа – коефіцієнти, які визначаються у відповідності до певних вимог;
n – ціле невід'ємне число;
x^n – аргумент – цілий раціональний елемент.

Розв'язання (1) відносно a_j, (для $j = \overline{0, n}$), відбувається шляхом розв'язання систем m лінійний рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = b_i, \text{ для } i = \overline{1, m}, \qquad (2)$$

де x_i^j – значення цілого раціонального елементу у вузлових точках.

У доданках з (2) множники x_i^j можна розглядати як вагові коефіцієнти, що визначають вплив кожного a_j на поведінку кривої (2), в цілому. Враховуючи сказане, можна зауважити, що навіть за маленьких значень коефіцієнтів a_n; a_{n-1}; a_{n-2} … їх вплив на поведінку кривої (2) може бути достатньо значним через великі значення відповідних множників x_i^n; x_i^{n-1}; x_i^{n-2} …

Таке нерівномірне розподілення впливу кожного з коефіцієнтів a_j, як правило, призводить до появи неконтрольованих точок перегину на графіку кривої (1). Окрім того, застосування, у моделюванні, многочленів (1), за великих значень показників степеня *n*, потребує підвищення розмірності розрахункових значень для зменшення похибки у розрахунках. Підвищення розмірності, як правило, тягне за собою збільшення витрат комп’ютерних ресурсів, а це, у свою чергу, зменшує ефективність процесу моделювання.

Геть по іншому все відбувається у точкового полінома [1, 4, 5, 7], запис якого, у загальному вигляді для *n* точок, є наступним:

$$M = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot P_i(t), \tag{3}$$

де M – поточна точка на кривій точкового полінома;
A_i – вихідні вузлові (базисні) точки, які необхідно глобально інтерполювати;
$P_i(t)$ – характеристична функція (ХФ) для відповідної *i*-тої базисної точки.

У загальному вигляді ХФ для *n* базисних точок, має наступний запис:

$$P_j(t) = \frac{1}{\lambda_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (t_i - t), \text{ для } j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

де $\lambda_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (t_i - t_j)$, для $j = \overline{1,n}$.

У розгорнутому вигляді ХФ (4), наприклад для $n = 3$, матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{1}{\lambda_1}(t_2 - t)(t_3 - t), \text{ де число } \lambda_1 = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1); \\ P_2(t) &= \frac{1}{\lambda_2}(t_1 - t)(t_3 - t), \text{ де число } \lambda_2 = (t_1 - t_2)(t_3 - t_2); \\ P_3(t) &= \frac{1}{\lambda_3}(t_1 - t)(t_2 - t), \text{ де число } \lambda_3 = (t_1 - t_3)(t_2 - t_3), \end{aligned} \tag{5}$$

де параметр $0 \le t \le 1$ і може визначатися уздовж осі або уздовж довільної прямої, або поспіль уздовж ланок супровідної ламаної вихідної дискретно поданої кривої (ДПК). У сукупності (5) ХФ $P_j(t)$, для $i = \overline{1,3}$, забезпечують інтерполяцію трьох вихідних точок A_i, для $i = \overline{1,3}$. Через те, що у першій точці, за значення $t = t_1$ перший множник перетворює значення ХФ $P_1(t_1) = 1$. У той же час, добуток різниць параметрів, за значень $t = t_2$ та $t = t_3$, забезпечує $P_i(t_{i+1}) = 0$ та $P_i(t_{i+2}) = 0$. За рахунок цього, за значення $t = t_1$ $M = A_1$ з (3).

Аналогічні розмірковування будуть правдивими і для ХФ $P_2(t)$ та $P_3(t)$. Якщо $n > 3$, алгоритм записів ХФ для відповідних точок лишається незмінним, таким як і для $n = 3$. У цьому полягає геометричний спосіб інтерполяції, у якого множниками точок, кожного з доданків є цілі раціональні вирази (4), (5) однакового степеня, які як вагові коефіцієнти в однаковій мірі впливають на поведінку точкового полінома (3). За рахунок цього, на графіку кривої, що відповідає (3), не з’являються неконтрольовані точки перегину. Зі збільшенням *n* не зростає похибка геометричного способу інтерполяції, не треба підвищувати розрядність значень у розрахунках, не збільшуються витрати комп’ютерних ресурсів, що підвищує ефективність моделювання у порівнянні із застосуванням цілих раціональних функцій.

Однак, для одержання вказаних вище переваг точкових поліномів, після розробки записів характеристичних функцій, для усіх *n*, необхідно провести їх гармонізацію. Як відомо [9], гармонія –

це динамічний стан стійкої відповідності між цілим та його складовими частинами. Виходячи з означення гармонії, сформуємо тлумачення гармонізації точкової (точкової гармонізації).

Точкова гармонізація (гармонізація точкова) – це процес встановлення (приведення до) взаємної відповідності між усіма характеристичними функціями як параметричними складовими частинами точкового полінома, що являють собою параметричні множники у його доданках.

Для пояснення звернімося до запису точкового полінома (3), який не змінюється для будь-якої композиції з визначеної кількості *n* точок. Дійсно, обмежень щодо обрання положень кожної з *n* точок, яка являє собою геометричну фігуру (ГФ). Для цієї вихідної ГФ складається дві композиційні матриці: точкова - A_T та параметрична – $A_П$ [1, 4, 5, 7]. Елементами параметричної композиційної матриці $A_П$ єсть характеристичні функції (ХФ) з (3), сума яких μ_n приймається як ціле і для вихідної ГФ має дорівнювати одиниці:

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) \tag{6}$$

Необхідність дорівнювання одиниці для цілого, доведено у точковому БН-численні [2, 3].

Однак, як показує досвід, майже завжди $\mu_n \neq 1$.

Той факт, що μ_n не дорівнює одиниці означає, з геометричної точки зору, що ХФ $P_i(t)$, (для $i = \overline{1, n}$) не належать одній вихідній геометричній фігурі. Для пояснення цієї думки, наведемо такий приклад. Усякий трикутник має три кути, сума яких є *const*, звідси витікає, що довільно, без підрахунку, обравши три кути α, β, γ, сума яких не дорівнює $180°$, об'єднати їх без гармонізації, в один трикутник не є можливим. Для їх гармонізації можна або взяти довільно два кути, а третій обчислити, з урахуванням $const = 180°$; або усі три пропорційно змінити.

З алгебраїчної точки зору $\mu_n \neq 1$ означає, що дорівнювання нулю або одиниці значень ХФ у відповідних вузлових точках, є умовою необхідною але не достатньою для здійснення інтерполяції точковими поліномами без появи неконтрольованих точок перегину на інтерполяційній кривій.

Отже, у випадку, коли $\mu_n \neq 1$, треба застосовувати точкову гармонізацію, шляхом ділення кожної ХФ на μ_n, тобто виконати гармонізацію характеристичних функцій $P_i(t)$, для $i = \overline{1, n}$, які будемо позначати P_i, для $i = \overline{1, n}$.

$$P_i = \frac{P_i(t)}{\mu_n}, \text{ де } i = \overline{1, n} \tag{7}$$

Гармонізовані ХФ P_i у роботах [1, 4, 5, 7] було названо БН-координатами (Балюби-Найдиша координатами). У цих же роботах надано визначення БН-координат.БН-координати – це дробово-раціональні вирази у параметричній формі, що вказують на розмір частки участі кожної із базисних точок ГФ у визначення положення поточної точки відносно цих базисних точок. Гармонізовані точкові поліноми у роботах [1, 4, 5, 7] було названо Б-кривими (Балюби кривими), які ще у більшій мірі є усталеними щодо появи неконтрольованих точок перегину, для граничних композицій вихідних точок.

Висновки. Таким чином, якщо точковий поліном є цілою раціональною функцією у параметричній формі, що складається із суми добутків, у якій першим множником є точка, а другим цілий раціональний вираз у параметричній формі, то гармонізований точковий поліном (Б-крива) є дробово-раціональною функцією, доданки якої також є добутками, першим множником у яких також виступає базисна точка, а другим є дробово-раціональний вираз. Степені цих дробово-раціональних виразів, що являють собою множники, для усіх базисних точок дискретно поданої лінії, є однаковими, а це робить однаковим вплив, кожної з базисних точок, на визначення положення поточної точки точкового полінома – інтерполянта.

І навпаки, у традиційних цілих раціональних функцій множниками біля коефіцієнтів є значення аргументів, які мають різний степінь, а це робить різним вплив кожного з коефіцієнтів цілої раціональної функції на визначення поточної точки на ній. Окрім різного впливу на визначення поточної точки, збільшується вірогідність похибки та появи неконтрольованих точок перегину на інтерполяційній кривій. Використання цілих раціональних функцій потребують підвищення розрядності розрахункових значень задля зменшення похибки розв’язків. Підвищення розрядності необхідне через те, що значення аргументу найбільших степенів n, $(n - 1)$, $(n - 2)$, …, як правило, має множниками замалі коефіцієнти для того, щоб підвищити точність розрахунків і щоб не виникли, через похибки у розрахунках, неконтрольовані точки перегину. В результаті сказаного, відбувається збільшення витрат комп’ютерних ресурсів, а це тягне за собою здороження процесу моделювання та експлуатації моделі, що зменшує ефективність проектування, в цілому.

І навпаки, використання гармонізованих точкових поліномів не вимагає підвищення розрядності значень чисел у розрахунках через те, що степінь дробово-раціональних виразів-множників базисних точок, є однаковим для усіх доданків. В результаті чого, розрахункові значення поточної точки постійно знаходяться у полі значень, не з’являються неконтрольовані точки перегину та не підвищується вартість проектування.

Отже, підбиваючи підсумок, можна сказати, що процес гармонізації точкових поліномів приводить усі його характеристичні функції, знайдені алгебраїчним способом і такі, що умовно кажучи, належать «різним геометричним схемам», до таких, які належать «одній геометричній схемі».

Застосування гармонізованих точкових поліномів у моделюванні ліній сіток на поверхнях об’ємних геометричних фігур довільної форми, має значні переваги перед розглянутими іншими моделями кривих, підвищує якість моделювання та є більш ефективним.

Перспективи подальших досліджень. Показати на порівняльних тестових прикладах переваги інтерполяції гармонізованими точковими поліномами високих степенів. Розробити теоретичні основи та алгоритми застосування гармонізованих точкових поліномів для моделювання у інтерактивному режимі плоских кривих різного ступеня складності.

Список бібліографічних посилань

1. Адоньєв Є.О. (2018) Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис..докт.техн.наук. Р.512. АСМ.
2. Балюба И.Г. (1995) Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления. Автореф.дисс…докт.техн.наук, 36 с. АСМ.
3. Балюба И.Г., Найдыш В.М. (2015) Точечное исчисление [учебное пособие], 234 с. АСМ.
4. Верещага В.М. (2017) Композиційне геометричне моделювання: Монографія, 108 с. АСМ.
5. Верещага В.М., Найдиш А.В., Адоньєв Є.О. (2019) Метод композиційного геометричного моделювання. Монографія, 310 с. АСМ.
6. Верещага В.М., Павленко О.М., Найдиш А.В. (2019) Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія, 187с. АСМ.
7. Верещага В.М., Найдиш А.В. , Адоньєв Є.О., Лисенко К.Ю. (2019) Основи композиційного геометричного моделювання: навчальний посібник, 255с. АСМ.
8. Рубцов М.О., Кравець В.І., Назарова О.П. (2015) Вища математика: навч. посіб. у 2-х ч., ч1., 242 с. АСМ.
9. Укладач І.М. Забіяка (2007) Тлумачний словник сучасної української мови. Близько 50000 сл., 512 с. АСМ.

References

1. Adoniev E.A. (2018) Compositional method of geometric modeling of multifactor systems: dissertation, P. 512. ACM.
2. Balyuba I.G. (1995) Constructive geometry of manifolds based on point calculus. Author's dissertation… Ph.D., P. 36. ACM.
3. Balyuba I.G. Point calculation [textbook] (2015) P. 234. ACM.
4. Vereshchaga V.M. (2017) Compositional geometric modeling: Monograph / V.M. Screaming. P. 108. ACM.
5. Vereshchaga V.M., Naidysh A.B., Adoniev E.O. (2019) Method of compositional geometric modeling. Monograph / P.310. ACM.
6. Vereshchaga V.M., Pavlenko O.M., Naidysh A.V. (2019) Modeling of horizontal land area in point numbering: monograph P.187. ACM.
7. Vereshchaga V.M., Naidysh A.B., Adoniev E.O., Lysenko K.U. (2019) Fundamentals of compositional geometric modeling: a textbook P.255. ACM.
8. Rubtsov M.O., Kravets V.I., Nazarova O.P. (2015) Higher mathematics: textbook. way. at 2 p.m., h1. P.242. ACM.
9. Contributor I.M. Zabiiaka (2007) Explanatory dictionary of the modern Ukrainian language. About 50,000 w., P.512. ACM.