DOI: 10.36910/6775-2524-0560-2020-39-11
УДК: 004.41: 616.12-073.96/97
Лупенко Сергій Анатолійович[1], д.т.н., професор
https://orcid.org/0000-0002-6559-0721
Литвиненко Ярослав Володимирович[1], д.т.н., доцент
https://orcid.org/0000-0001-7311-4103
Стадник Наталія Богданівна[1], асистент
https://orcid.org/0000-0002-7781-7663
Зозуля Андрій Миколайович[1], аспірант
https://orcid.org/0000-0003-1582-3088
[1] Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна
Сверстюк Андрій Степанович[2], к.т.н., доцент
https://orcid.org/0000-0001-8644-0776
[2] Тернопільський національний медичний університет імені І.Я. Горбачевського.

УМОВНИЙ ЦИКЛІЧНИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТУ ЯК УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦИКЛІЧНИХ СИГНАЛІВ ІЗ ПОДВІЙНОЮ СТОХАСТИЧНІСТЮ

Лупенко С.А., Литвиненко Я.В., Стадник Н.Б., Зозуля А.М., Сверстюк А.С. Умовний циклічний випадковий процес дискретного аргументу як узагальнена матиматична модель циклічних сигналів із подвійною стохастичністю. Робота присвячена розвитку математичного моделювання циклічних сигналів із подвійною стохастичністю, а саме, побудові їх математичної моделі у вигляді умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу. Ця модель дає змогу несуперечливо врахувати стохастичність циклічних сигналів як при їх морфологічному статистичному аналізі, так і при статистичному аналізі їх ритму.
Ключові слова: циклічний сигнал, умовний циклічний випадковий процес, морфоаналіз, аналіз ритму.

Лупенко С.А., Литвиненко Я.В., Стадник Н.Б., Зозуля А.М., Сверстюк А.С. Условный циклический случайный процесс дискретного аргумента как обобщенная матиматична модель циклических сигналов с двойной стохастичность. Работа посвящена развитию математического моделирования циклических сигналов с двойной стохастичность, а именно, построении их математической модели в виде условного циклического случайного процесса дискретного аргумента. Эта модель позволяет непротиворечиво учесть стохастичность циклических сигналов как при их морфологическом статистическом анализе, так и при статистическом анализе их ритма.
Ключевые слова: циклический сигнал, условный циклический случайный процесс, морфоанализ, анализ ритма.

Lupenko S.A., Lytvynenko Ia.V., Stadnyk N.B., Zozulia A.M., Sverstiuk A.S. Conditional cyclic random process of a discrete argument as a generalized mathematic model of cyclic signals with double stochasticity. The work is devoted to the development of mathematical modeling of cyclic signals with double stochasticity, namely, the construction of their mathematical model in the form of a conditional cyclic random process of a discrete argument. This model allows to take into account stochasticity of cyclic signals both in their morphological statistical analysis and in statistical analysis of their rhythm.
Keywords: cyclic signal, conditional cyclic random process, morphoanalysis, rhythm analysis.

Постановка наукової проблеми. Циклічні процеси та явища значно поширені у різних сферах дійсності, зокрема, вони мають місце в економіці, біології, медицині, техніці. Дослідження циклічних процесів із залученням сучасних інформаційних систем потребує попередньої розробки адекватних їх математичних моделей. Зважаючи на це, виникає необхідність розробки математичних моделей циклічних процесів, зокрема у вигляді умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу. Дана модель дає змогу несуперечливо врахувати стохастичність циклічних сигналів, яка має засоби врахування подвійної стохастичності у його морфологічній та ритмічній структурах.

Аналіз досліджень. На сьогодні відомо багато різних математичних моделей циклічних процесів, серед яких гармонічна, періодична та майжеперіодична детерміновані функції, періодично корельований та періодично розподілений випадкові процеси, лінійний періодичний випадковий процес, майже періодично корельований випадковий процес, циклічний випадковий процес [1-7]. Всі ці моделі циклічних сигналів не дають змогу одночасно враховувати подвійну стохастичність у їх структурі, а саме, стохастичності у морфологічній структурі сигналу та стохастичності у ритмічній структурі сигналу. Прикладами циклічних процесів та сигналів із подвійною стохастичністю можуть бути кардіосигнали електричної, магнітної та механічної природи, економічні циклічні процеси, процеси появи плям на Сонці, процеси розтріскування нанопокриття на поверхні метеріалів.

У роботі [8] розглянуто підходи до математичного моделювання та методів опрацювання сигналів серця на базі циклічних випадкових процесів та векторів з їх програмною реалізацією [9, 10]. Статистичний аналіз та обґрунтування математичної моделі досліджуваних сигналів проведений в роботах [11-13]. На основі отриманих результатів у роботах [14-16] запропоновано інформативні ознаки циклічних біосигналів для побудови кардіодіагностичних систем.

У роботах [17, 18] започатковано розробку математичної моделі циклічного сигналу, яка має засоби врахування подвійної стохастичності у його структурі, а саме – стохастичності у морфологічній структурі сигналу та стохастчності у ритмічній структурі сигналу. Дану модель названо умовним циклічним випадковим процесом. Умовний циклічний випадковий процес враховує циклічність, стохастичність морфологічної та ритмічної структур досліджуваних процесів (сигналів).

Не зважаючи на отримані у роботах [8-16] результати, не вирішеними залишилося ряд завдань, зокрема, необхідно уточнити означення класу умовних циклічних випадкових процесів та означення випадкової функції ритму умовного циклічного випадкового процесу, а також уточнити суть підходу до проведення статистичного аналізу та аналізу ритму циклічних сигналів у рамках їх математичної моделі у вигляді умовного циклічного випадкового процесу. Також необхідно відзначити, що відсутнє означення умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу, що унеможливлює розробку адекватних статистичних методів аналізу цифрових сигналів.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Побудуємо умовний циклічний випадковий процес дискретного аргументу (умовного циклічного дискретного випадкового процесу). Для цього, згідно із роботами [17, 18], коротко розглянемо поняття циклічного випадкового процесу дискретного аргументу та введемо поняття класу ізоморфних циклічних випадкових процесів дискретного аргументу.

Означення 1. Областю визначення дискретного циклічного випадкового процесу є впорядкована дискретна $\mathbf{D}=\left\{t_{ml}\in\mathbf{R}, m\in\mathbf{Z}, l=\overline{1,L}, L\geq 2\right\}$ множина дійсних чисел, для елементів якої має місце такий тип лінійного упорядкування: $t_{m_1l_1}<t_{m_2l_2}$, якщо $m_2<m_1$, або якщо $m_2=m_1$, а $l_2<l_1$, в інших випадках $t_{m_1l_1}>t_{m_2l_2}$ ($m_2,m_1\in\mathbf{Z}$, $l_2,l_1=\overline{1,L}$, $0<t_{m,l+1}-t_{m,l}<\infty$).

Означення 2. Дискретний випадковий процес $\xi(\omega,t_{ml}), \omega\in\mathbf{\Omega}, t_{ml}\in\mathbf{D}\subset\mathbf{R}$, називається циклічним дискретним випадковим процесом, якщо існує така дискретна функція $T(t_{ml},n)$, яка задовольняє умовам функції ритму, що скінченновимірні вектори $(\xi(\omega,t_{m_1l_1}),\xi(\omega,t_{m_2l_2}),\ldots,\ \xi(\omega,t_{m_kl_k}))$ та $(\xi(\omega,t_{m_1l_1}+T(t_{m_1l_1},n)),\ \xi(\omega,t_{m_2l_2}+T(t_{m_2l_2},n)),\ldots,\ \xi(\omega,t_{m_kl_k}+T(t_{m_kl_k},n)))$, $n\in\mathbf{Z}$, при всіх цілих $k\in\mathbf{N}$ є стохастично еквівалентними у широкому розумінні.

Для дискретного циклічного випадкового процесу сімейство його функцій розподілу задовольняє наступним рівностям:

$$F_{k_\xi}(x_1,\ldots,x_k,t_{m_1l_1},\ldots,t_{m_kl_k})=F_{k_\xi}(x_1,\ldots,x_k,t_{m_1l_1}+T(t_{m_1l_1},n),\ldots,t_{m_kl_k}+T(t_{m_kl_k},n))=$$
$$=F_{k_\xi}(x_1,\ldots,x_k,y(t_{m_1l_1},n),\ldots,y(t_{m_kl_k},n)),x_1,\ldots,x_k\in\mathbf{R},t_{m_1l_1},\ldots,t_{m_kl_k}\in\mathbf{D},\ \ n\in\mathbf{Z},k\in\mathbf{N}\cdot \quad (1)$$

Дамо означення ізоморфізму відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів дискретного аргументу. Нехай маємо циклічні випадкові процеси $\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t_{ml}\in\mathbf{D}$ із функцією ритму $T_1(t_{ml},n)$ та $\xi_2(\omega,t'_{ml}), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ із функцією ритму $T_2(t'_{ml},n)$. Області визначення $\mathbf{D}=\left\{t_{ml}\in\mathbf{R}, m\in\mathbf{Z}, l=\overline{1,L}, L\geq 2\right\}$ та $\mathbf{D}'=\left\{t'_{ml}\in\mathbf{R}, m\in\mathbf{Z}, l=\overline{1,L}, L\geq 2\right\}$ цих випадкових процесів у загальному випадку є різними ($\mathbf{D}\neq\mathbf{D}'$).

Означення 3. Циклічний випадковий процес $\xi_1(\omega,t_{ml}), \omega\in\mathbf{\Omega}, t_{ml}\in\mathbf{D}$ із функцією ритму $T_1(t_{ml},n)$ та циклічний випадковий процес $\xi_2(\omega,t'_{ml}), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ із функцією ритму $T_2(t'_{ml},n)$, будемо називати ізоморфними відносно порядку та значень або казати, що між цими циклічними випадковими процесами існує ізоморфізм відносно порядку та значень, якщо мають місце такі властивості:

1. Ізоморфізм відносно порядку між областями визначення циклічних випадкових процесів (ізоморфізм між упорядкованими числовими множинами $\mathbf{D}$ та $\mathbf{D}'$), а саме:

1.а) має місце бієкція між $\mathbf{D}$ та $\mathbf{D}'$ (позначається так: $\mathbf{D}\Leftrightarrow\mathbf{D}'$), тобто, будь-якому $t_{ml}\in\mathbf{D}$, відповідає лише одне $t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ ($t_{ml}\to t'_{ml}$), а будь-якому $t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ ставиться у відповідність лише одне $t_{ml}\in\mathbf{D}$ ($t'_{ml}\to t_{ml}$), причому для будь-яких різних $t_{m_1l_1},t_{m_2l_2}\in\mathbf{D}$ їх образи $t'_{m_1l_1},t'_{m_2l_2}\in\mathbf{D}'$ є різними, і навпаки (відповідні елементи $t_{ml}\in\mathbf{D}$ та $t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ будемо називати бієктивно пов'язаними і позначати це так: $t_{ml}\leftrightarrow t'_{ml}$);

1.б) зберігається тип лінійного упорядкування множин $\mathbf{D}$ та $\mathbf{D}'$, тобто, $\forall t_{m_1l_1}, t_{m_2l_2} \in \mathbf{D}$, $\exists t'_{m_1l_1}, t'_{m_2l_2} \in \mathbf{D}'$, що $t'_{m_1l_1} \leftrightarrow t_{m_1l_1}$, $t'_{m_2l_2} \leftrightarrow t_{m_2l_2}$ та має місце відношення порядку $t'_{m_2l_2} > t'_{m_1l_1}$, якщо $t_{m_2l_2} > t_{m_1l_1}$, і навпаки.

2. Ізоморфізм відносно порядку циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$, а саме:

2.а) має місце бієкція між випадковими процесами $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$ (позначається так: $\xi_1(\omega, t_{ml}) \Leftrightarrow \xi_2(\omega, t'_{ml})$), тобто будь-якій парі $(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml}))$ із випадкового процесу $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$, відповідає лише одне пара $(t'_{ml}, \xi_2(\omega, t'_{ml}))$ ($(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml})) \rightarrow (t'_{ml}, \xi_2(\omega, t'_{ml}))$) із випадкового процесу $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$, а будь-якій парі $(t'_{ml}, \xi_2(\omega, t'_{ml}))$ із випадкового процесу $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$, відповідає лише одне пара $(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml}))$ ($(t'_{ml}, \xi_2(\omega, t'_{ml})) \rightarrow (t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml}))$) із випадкового процесу $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$, причому для будь-яких різних $t_{m_1l_1}, t_{m_2l_2} \in \mathbf{D}$ їх образи $t'_{m_1l_1}, t'_{m_2l_2} \in \mathbf{D}'$ є різними, і навпаки (відповідні пари $(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml}))$ та $(t'_{ml}, \xi_2(\omega, t'_{ml}))$ будемо називати бієктивно пов'язаними і позначати це так: $(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml})) \leftrightarrow (t'_{ml}, \xi_2(\omega, t'_{ml}))$);

2.б) циклічні випадкові процеси $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$ є упорядкованими за своїми областями визначення, причому порядкові типи випадкових процесів співпадають із порядковими типами їх областей визначення $\mathbf{D}$ та $\mathbf{D}'$. Тобто, множина пар $\{(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml})), t_{ml} \in \mathbf{D}\}$, що формує (репрезентує) циклічний випадковий процес $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ є упорядкованою за параметром t_{ml} і має однаковий порядковий тип із числовою множиною $\mathbf{D}$, оскільки завжди існує бієктивне відображення області визначення $\mathbf{D}$ на сам випадковий процес $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$, а саме елементу $t_{ml} \in \mathbf{D}$ ставиться у відповідність лише одна пара $(t_{ml}, \xi_1(\omega, t_{ml}))$, і навпаки, причому для двох різних $t_{m_1l_1}, t_{m_2l_2} \in \mathbf{D}$ відповідні їм пари $(t_{m_1l_1}, \xi_1(\omega, t_{m_1l_1}))$ та $(t_{m_2l_2}, \xi_1(\omega, t_{m_2l_2}))$ також різні. Те ж саме має місце і для випадкового процесу $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$, тобто лінійний порядок із області визначення $\mathbf{D}'$ індукується у сам випадковий процес $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$;

2. в) має місце один і той же тип упорядкування циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$, а саме: для будь-яких різних пар $(t_{m_1l_1}, \xi_1(\omega, t_{m_1l_1}))$ та $(t_{m_2l_2}, \xi_1(\omega, t_{m_2l_2}))$, що перебувають у бієктивній пов'язаності із парами $(t'_{m_1l_1}, \xi_2(\omega, t'_{m_1l_1}))$ та $(t'_{m_2l_2}, \xi_2(\omega, t'_{m_2l_2}))$ ($(t_{m_1l_1}, \xi_1(\omega, t_{m_1l_1})) \leftrightarrow (t'_{m_1l_1}, \xi_2(\omega, t'_{m_1l_1}))$, $(t_{m_2l_2}, \xi_1(\omega, t_{m_2l_2})) \leftrightarrow (t'_{m_2l_2}, \xi_2(\omega, t'_{m_2l_2}))$), мають місце відношення порядку $(t'_{m_2l_2}, \xi_2(\omega, t'_{m_2l_2})) > (t'_{m_1l_1}, \xi_2(\omega, t'_{m_1l_1}))$ та $(t_{m_2l_2}, \xi_1(\omega, t_{m_2l_2})) > (t_{m_1l_1}, \xi_1(\omega, t_{m_1l_1}))$, якщо $t'_{m_2l_2} > t'_{m_1l_1}$ та $t_{m_2l_2} > t_{m_1l_1}$ ($t'_{m_1l_1} \leftrightarrow t_{m_1l_1}$, $t'_{m_2l_2} \leftrightarrow t_{m_2l_2}$);

3. Має місце рівність значень циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$, коли їх відповідні аргументи $t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $t'_{ml} \in \mathbf{D}'$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t_{ml} \leftrightarrow t'_{ml}$), а саме, враховуючи властивість циклічності цих випадкових процесів, мають місце такі рівності:

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega, t_{ml} + T_1(t_{ml}, n)) = \xi_2(\omega, t'_{ml} + T_2(t'_{ml}, n))\} = 1,$$
$$t_{ml} + T_1(t_{ml}, n) \leftrightarrow t'_{ml} + T_1(t'_{ml}, n), t_{ml} \in \mathbf{D}, t'_{ml} \in \mathbf{D}', n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Для ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega, t_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml} \in \mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega, t'_{ml}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t'_{ml} \in \mathbf{D}'$ має місце рівність їх (k-вимірних) функцій розподілу $F_{k_{\xi_1}}(x_1, ..., x_k, t_{m_1l_1}, ..., t_{m_kl_k})$ та $F_{k_{\xi_2}}(x_1, ..., x_k, t'_{m_1l_1}, ..., t'_{m_kl_k})$, коли відповідні набори їх аргументів $t_i + T_1(t_i, n)$ та $t'_i + T_2(t'_i, n), i = \overline{1, k}, n \in \mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності, а саме мають місце такі співвідношення:

$$F_{k_{\xi_1}}(x_1, ..., x_k, t_{m_1l_1} + T_1(t_{m_1l_1}, n), ..., t_{m_kl_k} + T_1(t_{m_kl_k}, n)) =$$
$$= F_{k_{\xi_2}}(x_1, ..., x_k, t'_{m_1l_1} + T_2(t'_{m_1l_1}, n), ..., t'_{m_kl_k} + T_2(t'_{m_kl_k}, n)),$$
$$x_i \in \mathbf{R}, t_{m_il_i} \in \mathbf{D}, t'_{m_il_i} \in \mathbf{D}', t_{m_il_i} + T_1(t_{m_il_i}, n) \leftrightarrow t'_{m_il_i} + T_2(t'_{m_il_i}, n), i = \overline{1, k}, k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}. \quad (3)$$

Нехай маємо клас $\mathbf{\Theta}$ усіх можливих циклічних випадкових процесів дискретного аргументу, що задані на ймовірносному просторі $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ та на одній із множин класу **SetOf_D** усіх можливих множин типу $\mathbf{D}=\left\{t_{ml}\in\mathbf{R},\, m\in\mathbf{Z},\, l=\overline{1,L},\, L\geq 2\right\}$. На множині (класі) $\mathbf{\Theta}$ задамо відношення еквівалентності $\varphi\subset\mathbf{\Theta}^2$, а саме, бінарне відношення $\varphi(\xi_1(\omega,t_{ml}),\xi_2(\omega,t'_{ml}))$, де $\xi_1(\omega,t_{ml}),\xi_2(\omega,t'_{ml})$ - довільні дискретні циклічні випадкові процеси із $\mathbf{\Theta}$. Відношення еквівалентності $\varphi\subset\mathbf{\Theta}^2$ може бути задане різним чином, зокрема, і шляхом постулювання ізоморфізму відносно порядку та значень між циклічними випадковими процесами із $\mathbf{\Theta}$.

Задання відношення еквівалентності $\varphi\subset\mathbf{\Theta}^2$ на класі $\mathbf{\Theta}$ породжує розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}=\{\mathbf{\Theta}_\beta,\, \beta\in\mathbf{B}\}$ класу $\mathbf{\Theta}$ на підкласи ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів дискретного аргументу, тобто для елементів розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}=\{\mathbf{\Theta}_\beta,\, \beta\in\mathbf{B}\}$, мають місце такі співвідношення:

$$\bigcup_{\beta\in\mathbf{B}}\mathbf{\Theta}_\beta=\mathbf{\Theta},\ \mathbf{\Theta}_\beta\neq\varnothing,\ \mathbf{\Theta}_{\beta_1}\bigcap\mathbf{\Theta}_{\beta_2}=\varnothing,\ \beta_1\neq\beta_2,\ \beta_1,\beta_2\in\mathbf{B}. \tag{4}$$

Виберемо один довільний елемент із розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}=\{\mathbf{\Theta}_\beta,\, \beta\in\mathbf{B}\}$, а саме, деякий клас еквівалентності (ізоморфності) $\mathbf{\Theta}_\xi\in\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}$ циклічних випадкових процесів дискртеного аргументу. До складу цього класу входять ізоморфні відносно порядку та значень дискретні циклічні випадкові процеси, які відрізняються один від одного лише своїми функціями ритму, а перехід від одного процесу до іншого можна забезпечити через дію відповідного оператора перетворення шкали. А саме, два довільних циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t_{ml}\in\mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega,t'_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ із $\mathbf{\Theta}_\xi$ пов'язані через прямий $\mathbf{G}_{y_{12}}[\cdot]$ та обернений $\mathbf{G}_{y_{21}}[\cdot]$ оператори перетворення шкали, а саме:

$$\xi_2(\omega,t'_{ml})=\mathbf{G}_{y_{12}}[\xi_1(\omega,t_{ml})],\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_{ml}\in\mathbf{D},\ t'_{ml}\in\mathbf{D}'. \tag{5}$$

$$\xi_1(\omega,t_{ml})=\mathbf{G}_{y_{21}}[\xi_2(\omega,t'_{ml})],\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_{ml}\in\mathbf{D},\ t'_{ml}\in\mathbf{D}'. \tag{6}$$

Згідно робіт [17, 18], дія операторів перетворення шкали $\mathbf{G}_{y_{12}}[\cdot]$ та $\mathbf{G}_{y_{21}}[\cdot]$ на циклічні випадкові процеси $\xi_1(\omega,t_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t_{ml}\in\mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega,t'_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ повністю визначається (задається) своїми функціями перетворення шкали $y_{12}(t_{ml}),\,t_{ml}\in\mathbf{D}$ та $y_{12}(t'_{ml}),\,t'_{ml}\in\mathbf{D}'$, які є зростаючими функціями, а саме так:

$$\xi_2(\omega,t'_{ml})=\xi_2(\omega,y_{12}(t_{ml}))=\xi_1(\omega,t_{ml}),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_{ml}\in\mathbf{D},\ t'_{ml}\in\mathbf{D}'. \tag{7}$$

$$\xi_1(\omega,t_{ml})=\xi_2(\omega,y_{21}(t'_{ml}))=\xi_2(\omega,t'_{ml}),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t_{ml}\in\mathbf{D},\ t'_{ml}\in\mathbf{D}'. \tag{8}$$

Згідно робіт [17, 18], між функціями ритму $T_1(t_{ml},n)$ та $T_2(t'_{ml},n)$ циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t_{ml}\in\mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega,t'_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ із класу еквівалентності $\mathbf{\Theta}_\xi$, які пов'язані через оператори перетворення шкали $\mathbf{G}_{y_{12}}[\cdot]$ та $\mathbf{G}_{y_{21}}[\cdot]$ мають місце такі залежності:

$$T_2(y_{12}(t_{ml}),n)=y_{12}(t_{ml}+T_1(t_{ml},n))-y_{12}(t_{ml}),\ t_{ml}\in\mathbf{D},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{9}$$

$$T_1(y_{21}(t'_{ml}),n)=y_{21}(t'_{ml}+T_2(t'_{ml},n))-y_{21}(t'_{ml}),\ t'_{ml}\in\mathbf{D}',\ n\in\mathbf{Z}. \tag{10}$$

Статистичний аналіз будь-яких двох циклічних випадкових процесів $\xi_1(\omega,t_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t_{ml}\in\mathbf{D}$ та $\xi_2(\omega,t'_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t'_{ml}\in\mathbf{D}'$ із класу еквівалентності $\mathbf{\Theta}_\xi\in\mathbf{D}_{\mathbf{\Theta}}$ за їх будь-якими двома багатоцикловими реалізаціями $\xi_{1_\omega}(t_{ml})$ та $\xi_{2_\omega}(t'_{ml})$ повинен давати близькі результати, а саме, подібні статистичні оцінки ймовірінсних характеристик циклічних сигналів. Даний факт лежить в основі забезпечення емпіричної узгодженості результатів статистичного аналізу циклічного сигналу (електрокардіосигналу, магнітокардіосигналу, фонокардіосигналу) за його різними реєстрограмами.

Для формальної ідентифікації конкретного дискретного циклічного випадкового процесу, клас $\mathbf{\Theta}_\xi$ подамо як множину мічених параметром λ ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів $\mathbf{\Theta}_\xi=\left\{\xi_\lambda(\omega,t^\lambda_{ml}),\,\omega\in\mathbf{\Omega},\,t^\lambda_{ml}\in\mathbf{D}_\lambda,\,\lambda\in\mathbf{\Lambda}\right\}$, що задані на одному і тому ж ймовірносному просторі $(\mathbf{\Omega},\mathbf{F},\mathbf{P})$. Параметр λ набирає значень із деякої множини $\mathbf{\Lambda}$ ($\lambda\in\mathbf{\Lambda}$), потужність якої дорівнює потужності класу $\mathbf{\Theta}_\xi$. Будь-які, елементи із $\mathbf{\Theta}_\xi$ відрізняються між собою лише дискретною областю їх визначення, і як наслідок, їх дискретними функціями ритму. Власне область визначення $\mathbf{D}_\lambda=\left\{t^\lambda_{ml}\in\mathbf{R},\, m\in\mathbf{Z},\, l=\overline{1,L},\, L\geq 2\right\}$ будь-якого дискретного циклічного випадкового процесу

$\xi_\lambda(\omega, t_{ml}^\lambda), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^\lambda \in \mathbf{D}_\lambda$ із $\mathbf{\Theta}_\xi$ однозначно його ідентифікує (вирізняє, маркує) з поміж інших випадкових процесів із $\mathbf{\Theta}_\xi$. Також, область визначення $\mathbf{D}_\lambda = \left\{ t_{ml}^\lambda \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \geq 2 \right\}$ конкретного λ-процесу $\xi_\lambda(\omega, t_{ml}^\lambda), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^\lambda \in \mathbf{D}_\lambda$ із $\mathbf{\Theta}_\xi$ повністю визначає його функцію ритму $T_\lambda(t_{ml}^\lambda, n)$, а саме:

$$T_\lambda(t_{ml}^\lambda, n) = t_{m+n,l}^\lambda - t_{ml}^\lambda,\ m, n \in \mathbf{Z},\ l = \overline{1, L},\ L \geq 2,\ t_{ml}^\lambda \in \mathbf{D}_\lambda. \tag{11}$$

Таким чином, множину **SetOf_D** усіх можливих областей визначення ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів дискретного аргументу із класу $\mathbf{\Theta}_\xi$ також можна подати як параметричну множину, а саме:

$$\mathbf{SetOf\_D} = \{\mathbf{D}_\lambda, \lambda \in \mathbf{\Lambda}\} = \left\{ \left\{ t_{ml}^\lambda \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \geq 2 \right\}, \lambda \in \mathbf{\Lambda} \right\}. \tag{12}$$

Враховуючи наведені вище міркування, має місце бієкція між класом еквівалентності $\mathbf{\Theta}_\xi = \left\{ \xi_\lambda(\omega, t_{ml}^\lambda), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^\lambda \in \mathbf{D}_\lambda, \lambda \in \mathbf{\Lambda} \right\}$, множиною областей визначення **SetOf_D** та множиною функцій ритму $\mathbf{SetOf\_T} = \left\{ T_\lambda(t_{ml}^\lambda, n), t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}, \lambda \in \mathbf{\Lambda} \right\}$ ізоморфних відносно порядку та значень дискретних циклічних випадкових процесів із $\mathbf{\Theta}_\xi$, а саме, $\mathbf{\Theta}_\xi \Leftrightarrow \mathbf{SetOf\_D} \Leftrightarrow \mathbf{SetOf\_T}$. За таких взаємоднозначних відображеннь між класами функцій, бієктивно пов'язаними елементами, будуть ті елементи множин $\mathbf{\Theta}_\xi$, **SetOf_D** та **SetOf_T**, які мають однаковий параметр λ, а саме: $\xi_\lambda(\omega, t_{ml}^\lambda) \leftrightarrow \mathbf{D}_\lambda \leftrightarrow T_\lambda(t_{ml}^\lambda, n)$.

Наведені вище математичні об'єкти формально враховують той факт, що моделлю циклічного сигналу, наприклад, електрокардіосигналу є циклічний випадковий процес, а також відображають той експериментальний факт, що оцінки функцій ритму електрокардіосигналу за різними його реєстрограмами суттєво відрізняються, однак статистичні характеристик самого сигналу за різними його реєстрограмами є близькими. Проте такий математичний опис необхідно доповними новим ймовірнісним простором, що уможливить опис ритму електрокардіосигналу як випадкової функції ритму в рамках теорії випадкових процесів. Такий опис дасть змогу усунути наявну суперечність між описами ритму та морфологічної структури в існуючих моделях циклічних сигналів та процесів.

Для цього розглянемо стохастичний експеримент, який описується деяким ймовірнісним простором $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$, що є стохастично незалежним із $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$. Введемо випадковий об'єкт $\lambda(\omega') = \lambda, \omega' \in \mathbf{\Omega}', \lambda \in \mathbf{\Lambda}$ як вимірну функцію з областю визначення $\mathbf{\Omega}'$ та областю значень $\mathbf{\Lambda}$. У такому разі ω'-реалізацією випадкового об'єкту $\lambda(\omega')$ є параметр λ, який визначає відповідний йому циклічний випадковий процес $\xi_\lambda(\omega, t_{ml}^\lambda), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^\lambda \in \mathbf{D}_\lambda$ із областю визначення $\mathbf{D}_\lambda$ та функцією ритму $T_\lambda(t_{ml}^\lambda, n)$. Тобто, можна ввести такі три випадкові об'єкти, які задані на ймовірнісному просторі $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$, а саме: умовний циклічний випадковий процес дискретного аргументу $\xi(\omega, t_{ml}(\omega')), \omega' \in \mathbf{\Omega}', \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega')$; випадкову дискретну область його визначення $\mathbf{D}(\omega') = \left\{ t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \geq 2 \right\}$, що задана на ймовірнісному просторі $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$ та приймає значення із множини **SetOf_D**, а також випадкову функцію ритму $T(t_{ml}(\omega'), n)$ умовного циклічний випадковий процес дискретного аргументу $\xi(\omega, t_{ml}(\omega'))$, яка приймає свої значення (детерміновані функції ритму) із множини **SetOf_T**.

Дамо означення цим трьом ймовірнісним об'єктам. Спочатку дамо означення умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу.

Означення 4. Випадковий об'єкт $\{\xi(\omega, t_{ml}(\omega')) \in \mathbf{\Theta}_\xi, \omega' \in \mathbf{\Omega}', \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega')\}$, який задано на стохастично незалежних ймовірнісних просторах $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ та $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$ називається ***умовним циклічним випадковим процесом дискретного аргументу***, якщо для кожної ω', відповідна його ω'-реалізація $\left\{ \xi_{\omega'}(\omega, t_{ml}^{\omega'}), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'} \right\}$ належить класу $\mathbf{\Theta}_\xi$ ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів дискретного аргументу.

Означення 5. Випадкова функція $T(t_{ml}(\omega'), n), \omega' \in \mathbf{\Omega}', t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$, яка задана на ймовірнісному просторі $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$ називається ***випадковою функцією ритму умовного циклічного випадкового***

процесу дискретного аргументу, якщо для кожної ω', відповідна її ω'-реалізація $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right)$, $t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}$ належить класу **SetOf_T**, кожен елемент якого задовольняє умовам функції ритму, а саме: 1) групі умов: 1.a) $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right) > 0$, якщо $n > 0$ ($T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, 1\right) < \infty$); 1.b) $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right) = 0$, якщо $n = 0$; 1.c) $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right) < 0$, якщо $n < 0$, $t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'} \subset \mathbf{R}$; 2) для будь-яких $t_{m_1 l_1}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}$ та $t_{m_2 l_2}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}$, для яких $t_{m_1 l_1}^{\omega'} < t_{m_2 l_2}^{\omega'}$, для функції $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right)$ виконується строга нерівність $T_{\omega'}\left(t_{m_1 l_1}^{\omega'}, n\right) + t_{m_1 l_1}^{\omega'} < T_{\omega'}\left(t_{m_2 l_2}^{\omega'}, n\right) + t_{m_2 l_2}^{\omega'}, \forall n \in \mathbf{Z}$; 3) функція $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right)$ є найменшою за модулем ($\left|T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right)\right| \le \left|T_{\omega'}^{\gamma}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right)\right|$) серед усіх таких функцій $\left\{T_{\omega'}^{\gamma}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right), \gamma \in \mathbf{\Gamma}\right\}$, які задовольняють вище наведеним умовам 1 та 2.

Означення 6. Випадковий об'єкт $\mathbf{D}(\omega') = \left\{t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \ge 2\right\}$, який задано на ймовірнісному просторі $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$ називається випадковою областю визначення ***умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу***, якщо для кожної ω', відповідна його ω'-реалізація $\mathbf{D}_{\omega'} = \left\{t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \ge 2\right\}$ є дискретною підмножиною дійсних чисел, елементи якої задовольняють такі умови: $t_{m_1 l_1}^{\omega'} < t_{m_2 l_2}^{\omega'}$, якщо $m_2 < m_1$, або якщо $m_2 = m_1$, а $l_2 < l_1$, в інших випадках $t_{m_1 l_1}^{\omega'} > t_{m_2 l_2}^{\omega'}$ ($m_2, m_1 \in \mathbf{Z}$, $l_2, l_1 = \overline{1, L}$, $0 < t_{m,l+1}^{\omega'} - t_{ml}^{\omega'} < \infty$).

Умовний циклічний випадковий процес $\{\xi(\omega, t_{ml}(\omega')), \omega' \in \mathbf{\Omega}', \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega')\}$ дискретного аргументу дає змогу одночасного врахування як стохастичності сигналів, що враховується при статистичному морфологічному їх аналізі, так і стохастичності ритмічної структури досліджуваного сигналу, що враховується при проведенні аналізу ритму.

Морфологічний статистичний аналіз зводиться до статистичного аналізу будь-якої його ω'-реалізації $\left\{\xi_{\omega'}\left(\omega, t_{ml}^{\omega'}\right), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}\right\}$ як циклічного випадкового процесу із детермінованою функцією ритму $T_{\omega'}\left(t_{ml}^{\omega'}, n\right)$, $t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}$ згідно із відомими методами статистичного опрацювання циклічних випадкових процесів [1-4]. Зокрема, такий стистичний аналіз зводиться до статистичного оцінювання вкладених у циклічний випадковий процес L стаціонарних та стаціонарно-пов'язаних випадкових процесів $\left\{\varphi_l\left(\omega, t_{ml}^{\omega'}\right), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}\right\}$. Кожний такий випадковий стаціонарний процес заданий на дискретній множині $\mathbf{D}_{\omega'}^{l} = \left\{t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = const\right\}$, яка є вкладеною в $\mathbf{D}_{\omega'}$ і описує (моделює) l-ту фазу досліджуваного електрокардіосигналу. Значення стаціонарного дискретного стаціонарного випадкового процесу $\varphi_l\left(\omega, t_{ml}^{\omega'}\right), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}, m \in \mathbf{Z}, l = const$ визначаються так:

$$\varphi_l\left(\omega, t_{ml}^{\omega'}\right) = \xi_{\omega'}\left(\omega, t_{ml}^{\omega'}\right), \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}^{\omega'} \in \mathbf{D}_{\omega'}^{l}, m \in \mathbf{Z}, l = const. \tag{13}$$

Аналіз серцевого ритму зводиться до статистичного аналізу елементів випадкової області визначення $\mathbf{D}(\omega') = \left\{t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \ge 2\right\}$ умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу $\{\xi(\omega, t_{ml}(\omega')), \omega' \in \mathbf{\Omega}', \omega \in \mathbf{\Omega}, t_{ml}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega')\}$, або до статистичного аналізу його випадкової функції ритму $T(t_{ml}(\omega'), n), \omega' \in \mathbf{\Omega}', t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}$. Випадкова функція ритму $T(t_{ml}(\omega'), n)$ повністю визначається елементами випадкової області $\mathbf{D}(\omega')$ згідно із формулою:

$$T(t_{ml}(\omega'), n) = t_{m+n,l}(\omega') - t_{m,l}(\omega'), m, n \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, t_{m,l}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega'). \tag{14}$$

Зокрема, при $n = 1$, функція ритму $T(t_{ml}(\omega'), 1)$ обчилюється так:

$$T(t_{ml}(\omega'), 1) = t_{m+1,l}(\omega') - t_{m,l}(\omega'), m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, t_{m,l}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega'). \tag{15}$$

Якщо в аналізі серцевого ритму брати за основу випадкову функцію ритму $T(t_{ml}(\omega'), 1)$ умовного циклічного випадкового процесу $\xi(\omega, t_{ml}(\omega'))$, зберігаючи чітку прив'язку до фази серцевого циклу та номеру серцевого циклу, то математичну модель ритмокардіосигналу подамо як вектор випадкових послідовностей:

$$\mathbf{V}_L(\omega', m) = \left\{ \Delta T_l(\omega', m),\ \omega' \in \mathbf{\Omega}',\ l = \overline{1, L},\ m \in \mathbf{Z} \right\}, \tag{16}$$

де кожна l-та компонента вектора є випадковою послідовністю $\Delta T_l(\omega', m)$, значення якої дорівнює значенню випадкової функції ритму $T(t_{ml}(\omega'),1)$ у моменти часу $t_{ml}(\omega')$ із дискретної множини $\mathbf{D}_l(\omega') = \{t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = const\}$, яка є вкладеною в $\mathbf{D}(\omega')$ і описує часові відстані між однотипними l-ми фазами досліджуваного електрокардіосигналу у двох його сусідніх циклах, а саме:

$$\Delta T_l(\omega', m) = T(t_{ml}(\omega'),1) = t_{m+1,l}(\omega') - t_{m,l}(\omega'),$$
$$m \in \mathbf{Z},\ l = \overline{1, L},\ t_{m,l}(\omega') \in \mathbf{D}(\omega'). \tag{17}$$

У разі використання випадкової області $\mathbf{D}(\omega') = \left\{ t_{ml}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \geq 2 \right\}$ для аналізу серцевого ритму, перейдемо до такої матриці випадкових послідовностей:

$$\mathbf{M}(\omega', m) = \left\{ \Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m),\ l_1 l_2 = \overline{1, L} \right\}, \tag{18}$$

де кожний елемент матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$ є випадковою послідовністю $\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m)$, значення якої визначаються так:

$$\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m) = t_{m,l_2}(\omega') - t_{m,l_1}(\omega'),\ m \in \mathbf{Z},\ l_1 l_2 = \overline{1, L}\,. \tag{19}$$

Елементи $\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m)$ матриці описують часові відстані (інтервали) між, загалом різнотипними, фазами l_1 та l_2 досліджуваного електрокардіосигналу у всіх його циклах, а саме, задають різниці між моментами часу $t_{m,l_1}(\omega')$ та $t_{m,l_2}(\omega')$ із дискретних множин $\mathbf{D}_{l_1}(\omega') = \{t_{ml_1}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l_1 = const\}$ та $\mathbf{D}_{l_2}(\omega') = \{t_{ml_2}(\omega') \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l_2 = const\}$, які є вкладеними в $\mathbf{D}(\omega')$ і стосується l_1-ї та l_2-ї фаз досліджуваного електрокардіосигналу.

Проаналізуємо детальніше властивості матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$, а також її взаємозв'язок із вектором $\mathbf{V}_L(\omega', m)$. Перш за все, відзначимо, що множина $\left\{ \Delta T_{ll}(\omega', m), l = \overline{1, L} \right\}$ діагональних елементів матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$ є множиною детермінованих послідовностей із нульовими значеннями, а саме:

$$\Delta T_{ll}(\omega', m) = t_{m,l}(\omega') - t_{m,l}(\omega') = 0,\ \forall m \in \mathbf{Z},\ \forall l = \overline{1, L},\ \forall \omega' \in \mathbf{\Omega}'\,. \tag{20}$$

Зважаючи на це, діагональ матриці не несе жодної інформації про серцевий ритм. Також, легко бачити, що елементи $\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m)$ та $\Delta T_{l_2 l_1}(\omega', m)$ є протилежними за значеннями, а саме:

$$\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m) = -\Delta T_{l_2 l_1}(\omega', m),\ \forall m \in \mathbf{Z},\ \forall l = \overline{1, L},\ \forall \omega' \in \mathbf{\Omega}', \tag{21}$$

причому, якщо $l_2 > l_1$, то $\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m) > 0$, а $\Delta T_{l_2 l_1}(\omega', m) < 0$, і навпаки, якщо $l_2 < l_1$, то $\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m) < 0$, а $\Delta T_{l_2 l_1}(\omega', m) > 0$. Зважаючи на такі залежності для елементів матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$, для аналізу серцевого ритму слушно використовувати лише ті її елементи, які лежать над її головною діагоналлю, оскільки, лише вони є додатніми та мають фізичну інтерпретацію часової тривалості між різними фазами електрокардіосигналу у різних його циклах. А всі елементи матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$, що лежать під її діагноналлю, є від'ємними та за модулем дорівнюють відповідним елементам, що знаходяться над діагоналлю цієї матриці. Тобто, вся інформація про серцевий ритм сконцентрована у множині елементів над головною діагоналлю матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$, а саме:

$$\left\{ \Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m),\ l_1 = \overline{1, L},\ l_2 = \overline{l_1 + 1, L} \right\}. \tag{22}$$

Оскільки як матриця $\mathbf{M}(\omega', m)$, так і вектор $\mathbf{V}_L(\omega', m)$ повністю визначаються випадковою дискретною множиною $\mathbf{D}(\omega')$, то між ними існує взаємооднозначний взаємозв'язок, а саме, будь-яка послідовність $\Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m)$ із $\mathbf{M}(\omega', m)$, може бути визначена через елементи $\Delta T_l(\omega', m)$ із $\mathbf{V}_L(\omega', m)$. Тому математичною моделлю ритмокардіосигналу із підвищеною роздільною здатністю у практичних завданнях аналізу серцевого ритму може бути як модель структура $\left\{ \Delta T_{l_1 l_2}(\omega', m),\ l_1 = \overline{1, L},\ l_2 = \overline{l_1 + 1, L} \right\}$, так і вектор $\mathbf{V}_L(\omega', m)$.

У медичній діагностичній практиці може виникнути ситуація, коли необхідно застосовувати гібридний підхід, а саме, при обгрунтованому виборі моделі ритмокардіосигналу із підвищеною роздільною здатністю слушно описувати ритм серця як за допомогою деякої підмножини елементів випадкової матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$ (коли необхідно досліджувати тривалості між різнотипними фазами електрокардіосигналу у рамках кожного його циклу), так і за допомогою підмножини елементів випадкового вектора $\mathbf{V}_L(\omega', m)$ (коли необхідно досліджувати часові відстані між однотипними фазами електрокардіосигналу у двох його сусідніх циклах). Тому, у подальшому викладі матеріалу для математичного опису ритмокардіосигналу із підвищеною роздільною здатністю будемо використовувати вектор $\Xi_L(\omega', m) = \left\{ T_l(\omega', m),\, \omega' \in \mathbf{\Omega}',\, l = \overline{1, L},\, m \in \mathbf{Z} \right\}$, елементи якого є можуть бути як елементами із матриці $\mathbf{M}(\omega', m)$, так і елементи із вектора $\mathbf{V}_L(\omega', m)$. Розмірність (кількість компонент) L вектора $\Xi_L(\omega', m)$ визначає роздільну здатність ритмокардіосигналу та дорівнює кількості досліджуваних часових інтервалів між наперед виділеними фазами в електрокардіосигналі.

Модель ритмокардіосигналу у вигляді вектора $\Xi_L(\omega', m)$ є надто абстрактною, щоб на її основі можливо було розробляти конкретні методи статистичного аналізу ритмокардіосигналу із підвищеною роздільною здатністю. Така надлишкова абстрактність зумовлена невизначеністю ймовірнісної структури цього випадкового вектора, що є наслідком абстрактності ймовірнісного простору $(\mathbf{\Omega}', \mathbf{F}', \mathbf{P}')$, на якому він заданий, оскільки ймовірнісна міра $\mathbf{P}'$ може бути довільною. Уточнення ймовірнісної міри $\mathbf{P}'$ потребують окремих досліджень. Тому необхідно суттєво уточнити, конкретизувати цю модель з метою розробки статистичних методів аналізу ритмокардіограми із підвищеною роздільною здатністю на її основі.

Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі розвинуто у вигляді деталізації процедуру побудови класу умовних циклічних випадкових процесів. У роботі розроблено процедуру побудови математичної моделі циклічних цифрових сигналів у вигляді умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу. Дано означення класу ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів дискретного аргументу. Ця модель дає змогу несуперечливо врахувати стохастичність циклічних сигналів як при їх морфологічному статистичному аналізі, так і при статистичному аналізі їх ритму. Дано означення випадкової функції ритму умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу. Розроблена математична модель циклічного сигналу у вигляді умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу несуперечливо відображає його подвійну (морфологічну та ритмічну) стохастичність, та дає змогу проводити статистичний морфологічний аналіз та аналіз ритму в сучасних інформаційних системах цифрового опрацювання даних.

В подальших дослідженнях, на основі результатів робіт [19-21], необхідно розширити функціональні можливості застосування математичної моделі циклічних цифрових сигналів у вигляді умовного циклічного випадкового процесу дискретного аргументу, використовуючи Web-технології, забезпечивши при цьому проведення імітаційного моделювання досліджуваних сигналів із використанням їх нової моделі.

Список бібліографічного опису

1. Li J., Deng H. Vibration suppression of rotating long flexible mechanical arms based on harmonic input signals. Journal of Sound and Vibration. Vol. 436. 2018. P. 253-261.
2. Voss H.U. Hypersampling of pseudo-periodic signals by analytic phase projection. Computers in Biology and Medicine. Vol. 98. 2018. P. 159-167.
3. Medvedev A., Proskurnikov A., Zhusubaliyev Z. Mathematical modeling of endocrine regulation subject to circadian rhythm. Annual Reviews in Control. Vol. 46. 2018. P. 148-164.
4. McLachlan N.M., Grayden D.B. Enhancement of speech perception in noise by periodicity processing: A neurobiological model and signal processing algorithm. Speech Communication. Vol. 57. 2014. P. 114-125.
5. Javorskyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 83. 2017. P. 406-438.
6. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. Digital Signal Processing. Vol. 65. 2017. P. 27-51.
7. Naseri H., Homaeinezhad M., Pourkhajeh H. Noise/spike detection in phonocardiogram signal as a cyclic random process with non-stationary period interval. Computers in Biology and Medicine. Vol. 43(9). 2013. P. 1205-1213.
8. Лупенко С., Зозуля А., Сверстюк А., Стадник Н. Математичне моделювання та методи опрацювання сигналів серця на базі циклічних випадкових процесів та векторів. Sciences and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. Vol. VI(20). ISSUE 172. 2018. Budapest. P. 47-54.
9. Лупенко С.А., Луцик Н.С., Литвиненко Я.В., Зозуля А.М. Програмний комплекс для морфологічного аналізу та аналізу серцевого ритму з підвищеною інформативністю. Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. № 1. ВНТУ. 2016. С. 13-22.

10. Литвиненко Я.В., Лупенко С.А., Сверстюк А.С. Програмний комплекс для обробки та моделювання синхронно зареєстрованих кардіосигналів з використанням моделей та методів теорії циклічних функціональних відношень. Вісник Хмельницького національного університету. 2009. №5. С.80-87.

11. Lupenko S., Lutsyk N., Yasniy O., Sobaszek Ł. Statistical analysis of human heart with increased informativeness. Acta mechanica et automatica. Vol. 12. 2018. P. 311–315.

12. Лупенко С.А., Литвиненко Я.В., Сверстюк А.С. Статистичний сумісний аналіз кардіосигналів на основі вектора циклічних ритмічно пов’язаних випадкових процесів. Електроніка та системи управління. Національний авіаційний університет. 2008. № 4 (18). С. 22-29.

13. Сверстюк А. С. Обгрунтування та верифікація математичної моделі синхронно зареєстрованих кардіосигналів з використанням вектора циклічних ритмічно пов’язаних випадкових процесів. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. 2009. № 1. С. 143-147.

14. Lupenko S., Lutsyk N., Yasniy O., Zozulia A. The Modeling and diagnostic features in the computer systems of the heart rhythm analysis with the increased informativeness. 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)" June 5-7 in Ceske Budejovice, Czech Republic. 2019. P. 121-124.

15. Lupenko S., Lutsyk N., Yasniy O., Zozulia A. The Modeling and Diagnostic Features in the Computer Systems of the Heart Rhythm Analysis with the Increased Informativeness. 2019 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT). IEEE, 2019. P. 121-124.

16. Martsenyuk V. P., Sverstiuk A. S., Klos-Witkowska A., Horkunenko A. B., Rajba S. Vector of Diagnostic Features in the Form of Decomposition Coefficients of Statistical Estimates Using a Cyclic Random Process Model of Cardiosignals. The 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, 18-21 September. Metz. 2019. Vol. 1. P. 298-303.

17. Лупенко С.А., Луцик Н.С., Стадник Н.Б. Модель із подвійною стохастичністю у задачах математичного моделювання та аналізу циклічних процесів та сигналів. Матеріали IV науково-технічної конференції „Інформаційні моделі, системи та технології“, 15-16 травня 2014 року, Тернопіль. С. 10.

18. Лупенко С., Сверстюк А., Луцик Н., Стадник Н., Зозуля А. Умовний циклічний випадковий процес як математична модель коливних сигналів та процесів із подвійною стохастичністю. Поліграфія і видавнича справа. No.1 (71). 2016. С. 147-159.

19. Марценюк В.П., Семенець А.В., Сверстюк А.С. Концептуальні підходи до інтегрованого середовища проведення наукових медико-біологічних досліджень. Штучний інтелект. 2003. №2. С. 35-44.

20. Марценюк В.П., Кравець Н.О., Сверстюк А.С. Інформаційна система медико-біологічних досліджень: проект на основі Web-технологій. Український журнал телемедицини та медичної телематики. 2003. Т.1, № 1. С. 57-60.

21. Лупенко С.А., Дем’янчук Н.Р., Сверстюк А.С. Концептуально-методологічні основи імітаційного моделювання циклічних сигналів на ЕОМ із використанням їх моделі у вигляді циклічного функціонального відношення. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. 2008. № 4. С. 101–111.

References

1. Li J., Deng H. Vibration suppression of rotating long flexible mechanical arms based on harmonic input signals. Journal of Sound and Vibration. Vol. 436. 2018. P. 253-261.

2. Voss H.U. Hypersampling of pseudo-periodic signals by analytic phase projection. Computers in Biology and Medicine. Vol. 98. 2018. P. 159-167.

3. Medvedev A., Proskurnikov A., Zhusubaliyev Z. Mathematical modeling of endocrine regulation subject to circadian rhythm. Annual Reviews in Control. Vol. 46. 2018. P. 148-164.

4. McLachlan N.M., Grayden D.B. Enhancement of speech perception in noise by periodicity processing: A neurobiological model and signal processing algorithm. Speech Communication. Vol. 57. 2014. P. 114-125.

5. Javorskyj I., Kravets I., Matsko I., Yuzefovych R. Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 83. 2017. P. 406-438.

6. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Zakrzewski Z., Majewski J. Coherent covariance analysis of periodically correlated random processes for unknown non-stationarity period. Digital Signal Processing. Vol. 65. 2017. P. 27-51.

7. Naseri H., Homaeinezhad M., Pourkhajeh H. Noise/spike detection in phonocardiogram signal as a cyclic random process with non-stationary period interval. Computers in Biology and Medicine. Vol. 43(9). 2013. P. 1205-1213.

8. Lupenko S., Zozulia A., Sverstiuk A., Stadnyk N. Matematychne modeliuvannia ta metody opratsiuvannia syhnaliv sertsia na bazi tsyklichnykh vypadkovykh protsesiv ta vektoriv. Sciences and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. Vol. VI(20). ISSUE 172. 2018. Budapest. P. 47-54.

9. Lupenko S.A., Lutsyk N.S., Lytvynenko Ya.V., Zozulia A.M. Prohramnyi kompleks dlia morfolohichnoho analizu ta analizu sertsevoho rytmu z pidvyshchenoiu informatyvnistiu. Informatsiini tekhnolohii ta kompiuterna inzheneriia. № 1. VNTU. 2016. S. 13-22.

10. Lytvynenko Ya.V., Lupenko S.A., Sverstiuk A.S. Prohramnyi kompleks dlia obrobky ta modeliuvannia synkhronno zareiestrovanykh kardiosyhnaliv z vykorystanniam modelei ta metodiv teorii tsyklichnykh funktsionalnykh vidnoshen. Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. 2009. №5. S.80-87.

11. Lupenko S., Lutsyk N., Yasniy O., Sobaszek Ł. Statistical analysis of human heart with increased informativeness. Acta mechanica et automatica. Vol. 12. 2018. P. 311–315.

12. Lupenko S.A., Lytvynenko Ya.V., Sverstiuk A.S. Statystychnyi sumisnyi analiz kardiosyhnaliv na osnovi vektora tsyklichnykh rytmichno poviazanykh vypadkovykh protsesiv. Elektronika ta systemy upravlinnia. Natsionalnyi aviatsiinyi universytet. 2008. № 4 (18). S. 22-29.

13. Sverstiuk A. S. Obhruntuvannia ta veryfikatsiia matematychnoi modeli synkhronno zareiestrovanykh kardiosyhnaliv z vykorystanniam vektora tsyklichnykh rytmichno poviazanykh vypadkovykh protsesiv. Vymiriuvalna ta obchysliuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh. 2009. № 1. S. 143-147.

14. Lupenko S., Lutsyk N., Yasniy O., Zozulia A. The Modeling and diagnostic features in the computer systems of the heart rhythm analysis with the increased informativeness. 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)" June 5-7 in Ceske Budejovice, Czech Republic. 2019. P. 121-124.

15. Lupenko S., Lutsyk N., Yasniy O., Zozulia A. The Modeling and Diagnostic Features in the Computer Systems of the Heart Rhythm Analysis with the Increased Informativeness. 2019 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT). IEEE, 2019. P. 121-124.
16. Martsenyuk V. P., Sverstiuk A. S., Klos-Witkowska A., Horkunenko A. B., Rajba S. Vector of Diagnostic Features in the Form of Decomposition Coefficients of Statistical Estimates Using a Cyclic Random Process Model of Cardiosignals. The 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications, 18-21 September. Metz. 2019. Vol. 1. P. 298-303.
17. Lupenko S.A., Lutsyk N.S., Stadnyk N.B. Model iz podviinoiu stokhastychnistiu u zadachakh matematychnoho modeliuvannia ta analizu tsyklichnykh protsesiv ta syhnaliv. Materialy IV naukovo-tekhnichnoi konferentsii „Informatsiini modeli, systemy ta tekhnolohii", 15-16 travnia 2014 roku, Ternopil. S. 10.
18. Lupenko S., Sverstiuk A., Lutsyk N., Stadnyk N., Zozulia A. Umovnyi tsyklichnyi vypadkovyi protses yak matematychna model kolyvnykh syhnaliv ta protsesiv iz podviinoiu stokhastychnistiu. Polihrafiia i vydavnycha sprava. No.1 (71). 2016. S. 147-159.
19. Martseniuk V.P., Semenets A.V., Sverstiuk A.S. Kontseptualni pidkhody do intehrovanoho seredovyshcha provedennia naukovykh medyko-biolohichnykh doslidzhen. Shtuchnyi intelekt. 2003. №2. S. 35-44.
20. Martseniuk V.P., Kravets N.O., Sverstiuk A.S. Informatsiina systema medyko-biolohichnykh doslidzhen: proekt na osnovi Web-tekhnolohii. Ukrainskyi zhurnal telemedytsyny ta medychnoi telematyky. 2003. T.1, № 1. S. 57-60.
21. Lupenko S.A., Demianchuk N. R., Sverstiuk A. S. Kontseptualno-metodolohichni osnovy imitatsiinoho modeliuvannia tsyklichnykh syhnaliv na EOM iz vykorystanniam yikh modeli u vyhliadi tsyklichnoho funktsionalnoho vidnoshennia. Vymiriuvalna ta obchysliuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh. 2008. № 4. S. 101–111.